ЛЕКЦИЯ 1

ЭЛЕКТРОСТАТИКА

1. Гауссова система единиц

Гауссова система единиц (СГС) сильно отличается от СИ и гораздо более удобна для теоретических построений и решения задач. Например, в СИ закон Кулона записывается следующим образом:

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

Базисные единицы СГС: сантиметр, грамм, секунда и дополнительная магнитная либо электрическая единица (СГСМ и СГСЭ соответственно). В СГСЭ константа k принимается равной единице, вследствие чего размерность заряда становится составной.

$$[q] = \sqrt{\text{дин} \cdot \text{см}^2} = \text{ед.СГСЭ},$$

$$1\ \text{Кл} = 3 \cdot 10^9\ \text{ед.СГСЭ}.$$

Рекомендуемая литература: том 3 Сивухина и книга Н. А. Кириченко по электричеству.

2. Понятие телесного угла

Пусть есть точка, из которой наблюдается бесконечно малая площадка, характеризуемая вектором нормали $d\vec{S}$. Телесный конус, включающий в себя часть пространства, и есть телесный угол $d\Omega$.

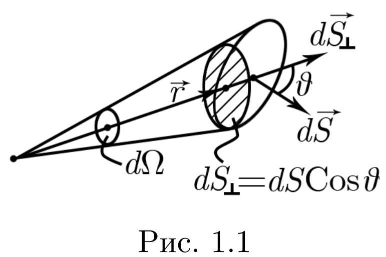


Рис. 1.1

Положим по определению

$$\frac{dS_\perp}{r^2} = d\Omega = \frac{dS\cos\theta}{r^2}.$$

Здесь θ — угол между направлением вектора $\vec{r}$ в эту точку и нормалью к площадке dS, в общем случае направленной к нему под углом.

Как посчитать телесный угол конуса, если α — угол образующей?

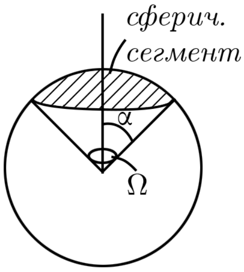


Рис. 1.2

Телесный угол — полный аналог привычного угла на плоскости, который задается как отношение длины отмеренной им дуги C к радиусу окружности R: $\theta = \frac{C}{R}$. Телесный же угол находится в пространстве и задается как $\frac{S_{\text{сферы}}}{R^2}$.

$$\Omega = \frac{S_{\text{сф.сег.}}}{R^2} = 2\pi(1-\cos\alpha).$$

Следовательно,

$$d\Omega = 2\pi\sin\alpha\, d\alpha.$$

3. Дипольный момент

Первый рассматриваемый в данном курсе физический объект — жесткий диполь. Это два разноименных заряда $\pm q$, закрепленные на концах жесткого стержня длиной l.

Определение 1: Дипольный момент *есть произведение величины заряда диполя на его плечо $\vec{p} = q\vec{l}$.* ♣

Дипольный момент является важнейшим физическим понятием, применимым на практике: например, им обладают атомы и молекулы.

Найдем поле, создаваемое таким диполем.

Вспомним, что по определению электрическое поле в каждой точке направлено по направлению силы, действующей на единичный положительный (пробный) заряд, помещенный в него. Величина данной силы называется напряженностью электрического поля E. Все силовые линии самозамкнуты и направлены от «+» к «–» (силовая линия, совпадающая с осью диполя, затухает на бесконечности).

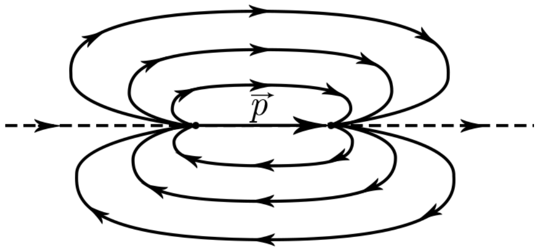


Рис. 1.3

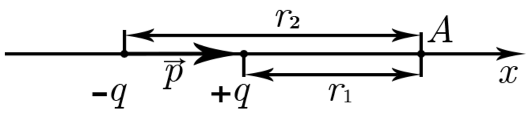


Рис. 1.4

3.1. Случай заряда на оси диполя

Стоит начать с простого случая и рассчитать силу взаимодействия жесткого диполя и точечного заряда, находящегося на его оси. Задача будет решаться в приближении $r \gg l$, т е. диполь считается точечным. Найдем напряженность электрического поля в точке A E_A по закону Кулона:

$$E_A = q\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}\right) = q\frac{(r_1 - r_2)(r_1 + r_2)}{(r_1 r_2)^2}.$$

Далее используем приближение точечености диполя $r \gg l$ и соотношения

$$r_1 - r_2 = l,$$

$$r_1 + r_2 \approx 2r,$$

$$(r_1 r_2)^2 \approx r^4.$$

Здесь r — расстояние от точечного диполя до заряда.

Таким образом,

$$E_A \approx \frac{2ql}{r^3}.$$

В векторной форме

$$\vec{E}_A = \frac{2\vec{p}}{r^3}.$$

3.2. Случай заряда на оси, перпендикулярной оси диполя

Получим теперь выражение для силы, действующей на заряд, находящийся на оси, перпендикулярной оси диполя. Изображение силовых линий поля диполя ясно показывает, что направление поля противоположно направлению дипольного момента.

Проведем вектора, показывающие взаимодействие каждого из зарядов с пробным. Поскольку в диполе заряды одинаковы по величине, то и сила воздействия каждого из

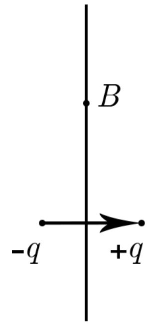


Рис. 1.5

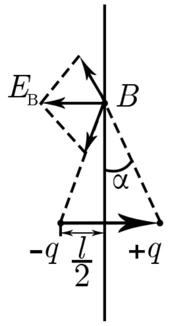


Рис. 1.6

них на пробный заряд будет одинаковой. Видно также, что вертикальные компоненты сил взаимоуничтожаются, и результирующая сила будет направлена горизонтально.

$$E_q = \frac{q}{r^2}, E_B = 2E_q \sin\alpha = \frac{2q}{r^2}\frac{l}{2r} = \frac{p}{r^3}.$$

Соответственно, в векторной форме:

$$\vec{E}_B = \frac{\vec{p}}{r^3}.$$

3.3. Случай произвольно расположенного заряда

Далее, опираясь на два полученных простых результата, можно получить общую формулу взаимодействия заряда и жесткого диполя. Более подробно вывод см. в 3 томе Сивухина.

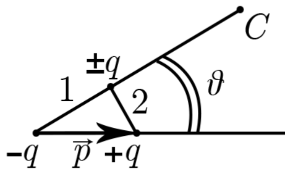


Рис. 1.7

Теперь необходимо рассчитать поле в точке C, расположенной произвольно относительно диполя. Это можно сделать, исходя из простой идеи:

1. Проведем отрезок, соединяющий $-q$ и точку C;
2. Опустим на него перпендикуляр из $+q$;
3. В точку пересечения поместим одновременно два разноименных заряда $\pm q$, совпадающие по величине с имеющимися;
4. Получим два диполя (на рисунке обозначены 1 и 2) и заметим, что оперируя возникшими условными диполями, задачу можно свести к двум решенным выше;
5. Воспользуемся принципом суперпозиции и сложим два решения.

Итого,

$$\vec{E}_C = \frac{3(\vec{p},\vec{r})}{r^5}\vec{r} - \frac{\vec{p}}{r^3}.$$

Здесь r — радиус-вектор, проведенный из точечного диполя в точку C.

4. Диполь в однородном электрическом поле

Если диполь внести в однородное (одинаковое по величине в рассматриваемой области пространства) электрическое поле E, то он будет поворачиваться. Понадобится расписать механический момент, который будет действовать на диполь.

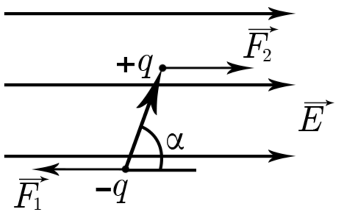


Рис. 1.8

Поскольку заряды одинаковы по величине, то $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$. Тогда механический момент запишется как векторное произведение плеча диполя l на силу F_2:

$$M = [\vec{l},\vec{F}_2] = [\vec{l}q,\vec{E}] = [\vec{p},\vec{E}].$$

Модуль момента запишется следующим образом:

$$|\vec{M}| = -pE\sin\alpha,$$

где α отсчитывается от направления, задаваемого полем E (минус появляется вследствие его ориентации). «Естественным» положением дипольного момента в электрическом поле является положение «вдоль по полю». При выведении диполя из данного равновесного положения дипольный момент будет колебаться. Если начать поворачивать диполь при помощи внешней силы, то будет накапливаться потенциальная энергия.

Задача 1.5. (частично)

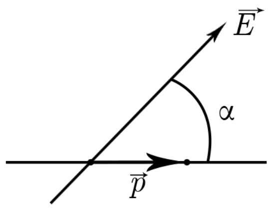


Рис. 1.9

Имеется диполь с моментом p, находящийся в электрическом поле E.

Вычислить величину потенциальной энергии, накапливающейся при его повороте на угол α.

Решение.

Интуитивно понятно, что энергия будет нулевой при $\alpha = 0$ и максимальной при $\alpha = \frac{\pi}{2}$, т е. когда $\vec{E} \perp \vec{p}$. Механический момент, действующий на диполь:

$$M = -pE\sin\alpha.$$

Распишем элементарную работу, совершающуюся при небольшом повороте:

$$\delta A = Md\alpha = -pE\sin\alpha d\alpha = dW,$$

где dW — изменение потенциальной энергии. Чтобы вычислить полную энергию, необходимо будет проинтегрировать полученное выражение:

$$W = pE\cos\alpha\Big|_{\alpha}^{\alpha_0 = \frac{\pi}{2}} = -pE\cos\alpha = -(\vec{p}, \vec{E}).$$

Энергия повернутого на угол α диполя отрицательна, поскольку его поворачивает внешняя сила. При отпускании диполь будет реализовывать накопленную потенциальную энергию в виде кинетической. Дальнейшее решение задачи см. Кириченко, стр. 36.

5. Диполь в неоднородном электрическом поле

Рассмотрим теперь диполь, находящийся в неоднородном поле (т е. в его выражении присутствует зависимость от координаты).

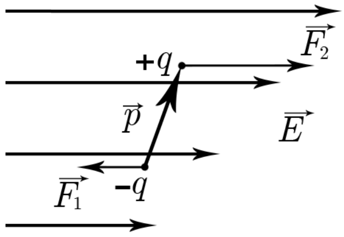


Рис. 1.10

В силу неоднородности $F_2 \neq F_1$.

$$\vec{F} = q(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \approx qd\vec{E}.$$

Здесь $d\vec{E}$ — приращение напряженности электрического поля на малой длине, сравнимой с плечом диполя. Согласно правилам дифференцирования,

$$\vec{F} = p_x \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + p_y \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} + p_z \frac{\partial \vec{E}}{\partial z}.$$

Учитывая известное определение вектора «набла» $\vec{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$, перепишем это выражение в более компактном виде:

$$(\vec{p}, \vec{\nabla}) = p_x \frac{\partial}{\partial x} + p_y \frac{\partial}{\partial y} + p_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Отсюда (вектор $\vec{E}$ имеет пространственные компоненты (E_x, E_y, E_z)):

$$\vec{F} = (\vec{p}, \vec{\nabla})\vec{E}.$$

Но, как правило, громоздко расписывать это нет необходимости: всегда возможно направить ось x вдоль направления $\vec{p}$, чтобы $\vec{p}$ имел только одну отличную от нуля компоненту: $\vec{p} = (p_x, 0, 0)$. В этом случае

$$\vec{F} = p_x \frac{\partial \vec{E}}{\partial x}.$$

Задача 1.9.

Найти силу взаимодействия $\vec{F}$ двух точечных диполей, расположенных вдоль одной оси, если известно, что расстояние между ними — d.

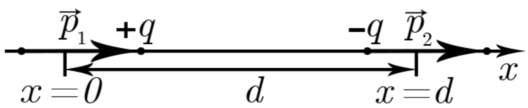


Рис. 1.11

Решение.

Можно сразу понять, что они притягиваются, поскольку ближе всего к друг к другу расположены именно разноименные заряды. Вычислим силу, считая, что дипольный момент $\vec{p}_2$ находится в поле дипольного момента $\vec{p}_1$. По выведенной формуле,

$$\vec{F} = p_2 \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial x}.$$

Так как $\vec{E}_1 \approx \frac{2\vec{p}_1}{x^3}$ (где $\vec{E}_1$ — поле на расстоянии x), то

$$\frac{dE_1}{dx} = -\frac{6p_1}{x^4}\Big|_{x=d} = -\frac{6p_1}{d^4}.$$

Окончательно

$$\vec{F} = -6\frac{p_1 p_2}{d^4}.$$

Задача 1.10.

Дан диск радиуса R, заряженный однородно и положительно зарядом с поверхностной плотностью $\sigma[\frac{зар}{см^2}]$.

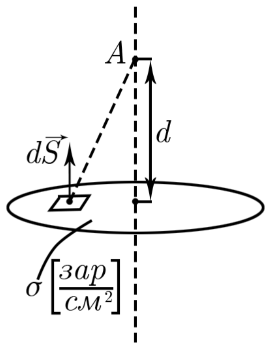


Рис. 1.12

Необходимо найти величину поля E_A в точке A, располагающейся на оси диска и отстоящей от него на расстояние d.

Решение.

Потенциально можно использовать закон Кулона: посчитать вклад каждого бесконечно малого колечка, отстоящего на расстояние r от центра диска и, проинтегрировав, получить результат.

Но задача будет решена другим способом: возьмем на поверхности диска бесконечно малую площадку dS.

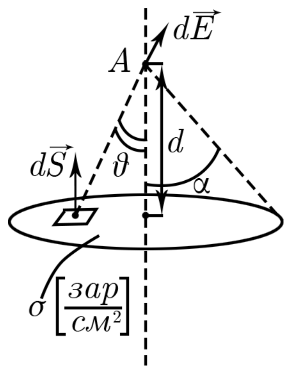


Рис. 1.13

Она задается вектором нормали $d\vec{S}$, по модулю совпадающим с ее площадью и направленным вертикально. Поэтому

$$dq = \sigma dS.$$

Вычислим вклад площадки в общее поле:

$$dE = \frac{dq}{r^2}.$$

Таким образом, суммарное поле

$$E_A = \int dE.$$

В силу симметрии задачи становится очевидным, что поле будет осевым параллельно оси, на которой лежит точка (все компоненты векторов, параллельные диску, взаимно сократятся).

$$E_A = \int dE = \int \sigma \underbrace{\frac{dS}{r^2} \cos\theta}_{d\Omega}.$$

Учитывая найденное в разделе «телесный угол», имеем:

$$\int \sigma d\Omega = 2\pi\sigma(1 - \cos\alpha) = 2\pi\sigma \left(1 - \frac{d}{\sqrt{R^2 + d^2}}\right).$$

Здесь α — полный угол, под которым виден диск из точки A. Для проверки правильности полученных решений часто смотрится их асимптотика, т.е. крайние случаи.

1. $d \longrightarrow 0$ (бесконечно приближаем точку к плоскости). Получится $2\pi\sigma$ — поле бесконечно протяженной однородно заряженной поверхности.

2. $d \longrightarrow \infty$, $d \gg R$ — закон Кулона.

6. Теорема Гаусса

Теорема Гаусса — математический аппарат, позволяющий рассчитывать электрические поля при произвольном распределении заряда внутри области. Пусть есть точечный заряд q. Окружим его произвольной замкнутой поверхностью.

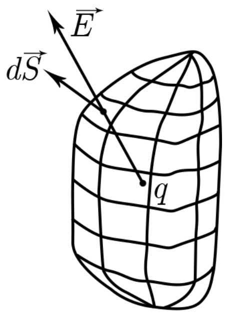


Рис. 1.14

Любую элементарную площадку (как обычно, ориентированную нормалью $d\vec{S}$) пронизывает вектор напряженности электрического поля. Распишем выражение $(\vec{E}, d\vec{S})$ с физическим смыслом потока электрического поля через поверхность. Для наглядности можно сравнить это с потоком воды с вектором скорости, определенным в каждой точке, и протекающим через виртуальную площадку S.

Поток, очевидно, рассчитывается по формуле $\Phi = vS[\frac{м^3}{с}]$. Также понятно, что если площадка параллельна вектору скорости, то вода скользит вдоль нее, не протекая через

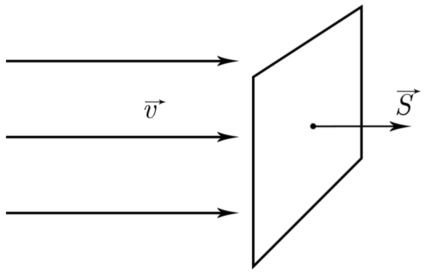


Рис. 1.15

внутренность, и поток равен нулю. Если она расположена под углом, то $\Phi = (\vec{v}, \vec{S})$, что справедливо для любого векторного поля. Для подсчета потока через через всю замкнутую поверхность нужно взять интеграл:

$$\Phi_E = \iint_S (\vec{E}, d\vec{S}) = \int\limits_S \quad q\frac{dS\cos\alpha}{r^2} = q\int\limits_S \quad d\Omega.$$

Последнее выражение есть полный телесный угол, равный 4π, следовательно,

$$\Phi_E = \iint \quad S(\vec{E}, d\vec{S}).$$

$$\Phi_E = \begin{pmatrix} 4\pi\Sigma q_i, & \text{внутри пов-ти } n \text{ зарядов,} \\ 0, & Mbox внутри пов-ти нет зарядов. \end{pmatrix}.$$

Если заряд распределен внутри поверхности по определенному закону $\rho(x, y, z)$, то

$$\iint_S (\vec{E}, d\vec{S}) = 4\pi \iiint_V \rho\, dV.$$

Понадобится также теорема Гаусса в дифференциальной форме. Выведем выражение для нее.

Пусть имеется область пространства с определенным распределением заряда $\rho(x, y, z)$.

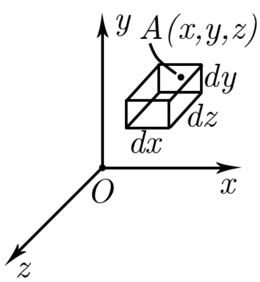


Рис. 1.16

Необходимо рассчитать электрическое поле в зависимости от распределения этого заряда в произвольной точке пространства. Выделим данную произвольную точку A и построим вокруг нее правильный параллелепипед с ребрами dx, dy и dz так, чтобы сама точка лежала на дальней грани.

Посчитаем поток через две грани, перпендикулярные оси x (поток через оставшиеся будет полностью аналогичен найденному):

$$[E_x(x+dx) - E_x(x)]\,dy\,dz = \frac{\partial E_x}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \frac{\partial E_x}{\partial x}\,dV.$$

Отсюда

$$d\Phi = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right)\,dV\Big|_{\text{т.Гаусса}} = 4\pi\rho\,dV.$$

Поделив обе части на dV и переписав формулу сокращенно, получаем одно из уравнений Максвелла:

$$(\vec{\nabla}, \vec{E}) \equiv div\vec{E} = 4\pi\rho.$$

Стоит упомянуть о физическом смысле дивергенции:

$$div\vec{E} = \lim_{V\to 0}\frac{\iint\limits_S (\vec{E}, d\vec{S})}{V},$$

где V — объем, ограниченный поверхностью S. Поверхность стягивается в точку, так что S, $V \longrightarrow 0$. Дивергенция — локальное свойство электрического поля.

Пример использования интегральной теоремы Гаусса

Дана бесконечно протяженная поверхность, заряженная с плотностью σ. Необходимо найти поле, индуцируемое этой поверхностью.

Решение.

Выделим цилиндрический контур с площадью основания S:

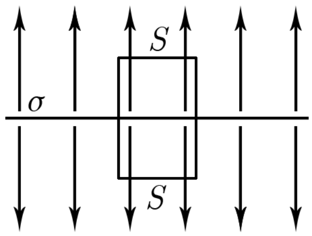


Рис. 1.17

$$\Phi_E = 2ES = 4\pi\sigma S.$$

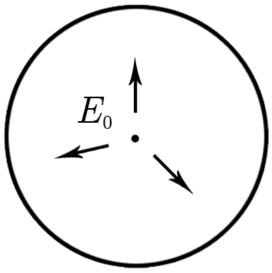
Следовательно,

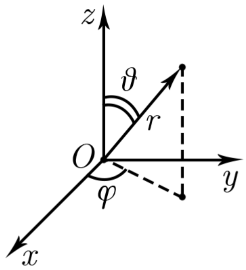
$$E = 2\pi\sigma.$$

Задача 1.21.

Дан шар радиуса R. Найти объемную плотность электрического заряда, при которой поле внутри него было бы радиальным и однородным с напряженностью E_0.

Решение.





Поскольку поле должно быть радиальным, для удобства совершим переход к сферическим координатам.

Для записи теоремы Гаусса понадобится выражение для дивергенции в данных координатах:

$$div\vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 E_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta E_\theta)\right).$$

В силу симметрии поля выражение сильно упрощается, поскольку единственной ненулевой компонентой будет E_r:

$$div\vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(E_0 r^2) = \frac{2E_0}{r} = 4\pi\rho.$$

Отсюда легко выразить плотность:

$$\rho(r) = \frac{E_0}{2\pi r}.$$

Можно решить задачу альтернативным методом, пользуясь интегральной теоремой Гаусса:

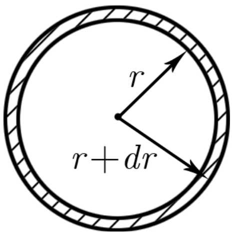


Рис. 1.18

Рассмотрим сферический слой внутри сферы и применим теорему Гаусса для шарового слоя:

$$E(r) = E_0(4\pi(r+dr)^2 - 4\pi r^2) = 4\pi\rho(r)\cdot 4\pi r^2\,dr = 4\pi E_0(r^2 + 2r\,dr - r^2) = 16\pi^2 r^2 \rho(r)\,dr.$$

Выражая $\rho(r)$ из последнего равенства, получим тот же самый результат.