ЛЕКЦИЯ 2

ПОТЕНЦИАЛ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ. МЕТОД ИЗОБРАЖЕНИЙ

На этой лекции будут рассмотрены понятие потенциала электрического поля и метод изображения.

Задача 1.23.

С какой поверхностной плотностью $\sigma(\theta)$ следует распределить заряд по поверхности сферы радиусом R (см. рис. 2.1), чтобы поле внутри нее было однородным и равным E_0? Каково при этом будет электрическое поле вне сферы?

Решение.

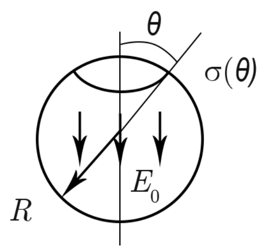

Рис. 2.1

Воспользуемся методом **наложений**. Возьмем две сферы радиуса R, которые заряжены одинаковыми по модулю, но противоположными по знаку зарядами и наложим одну сферу на другую (см. рис. 2.2).

Объемные плотности сфер равны $\pm\rho$ соответственно. Получим область пересечения, в которой отсутствует заряд. Рассмотрим шар радиусом R, в котором равномерно распределен заряд с объемной плотностью ρ (см. рис. 2.3).

По теореме Гаусса получим, что поле внутри шара будет распределено следующим образом.

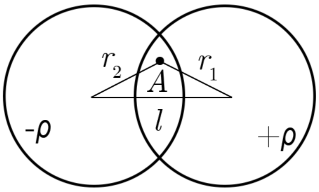

Рис. 2.2

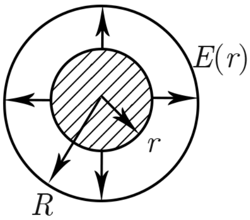

Рис. 2.3

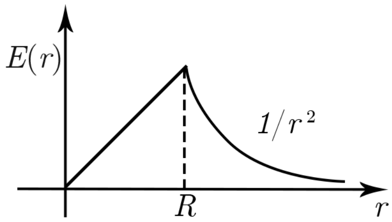

Рис. 2.4

$$\Phi_E = E(r)4\pi r^2 = 4\pi\rho\frac{4}{3}\pi r^3,$$

$$\vec{E}(r) = \frac{4}{3}\pi\rho\vec{r}.$$

Вернемся к методу наложений. Обозначим $\vec{l}$ — вектор смещения. Найдем поле в точке A.

$$\vec{E}(A) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{4}{3}\pi\rho(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = -\frac{4}{3}\pi\rho\vec{l}.$$

Откуда следует, что поле в этой области однородно и пропорционально величине смещения l.

Рассмотрим две сферы, которые находятся очень близко друг к другу (см. рис. 2.5).

Электрическое поле внутри области пересечения будет однородным и равным E_0. Обозначим толщину слоя $'$. Очевидно, что

$$l' = l\cos\theta.$$

Тогда

$$\sigma(\theta) = \rho l' = \rho l\cos\theta.$$

Было получено, что

$$\rho = \frac{3E_0}{4\pi l}.$$

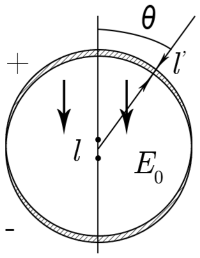

Рис. 2.5

Значит,

$$\sigma(\theta) = \frac{3E_0}{4\pi}\cos\theta.$$

Запишем дипольный момент сфер.

$$\vec{P} = q\vec{l} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \vec{l} = -R^3 \vec{E}_0.$$

где q — заряд всей сферы.

Из этой задаче следует очень важный вывод. Если проводящую сферу поместить в однородное внешнее электрическое поле, то сфера поляризуется. Она приобретет дипольный момент

$$\vec{P} = -R^3 \vec{E}_0.$$

Отсюда можно посчитать поле вне этой сферы.

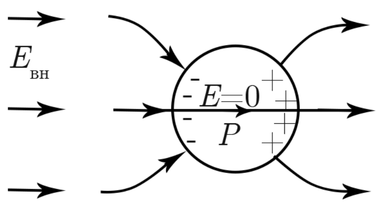

Рис. 2.6

Поле внутри металла отсутствует. Поле снаружи окажется радиальным и будет суперпозицией внешнего поля и поля образовавшегося диполя.

$$\vec{E}(r)\Big|_{r>R} = \vec{E}_{внеш} + \vec{E}_{дип},$$

$$\vec{P} = R^3 \vec{E}_{внеш}, \quad E_{дип} = \frac{3(\vec{p},\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}.$$

Задача 1.25а.

В однородное электрическое поле E_0 вносится незаряженный проводящий шар. Указать на его поверхности точки, в которых:

а) поле по абсолютной величине остается прежним;

б) поле по абсолютной величине удваивается.

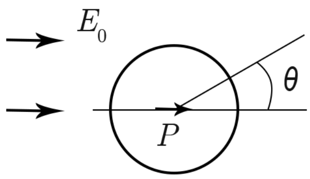

Рис. 2.7

Решение.

$$\vec{E}(r)\Big|_{r=R} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{\text{дип}} = E_0 + \frac{3(\vec{p},\vec{R})\vec{R}}{R^5} - \frac{\vec{p}}{R^3} = E_0 + \frac{3(\vec{E}_0,\vec{R})\vec{R}R^3}{R^5} - \frac{R^3\vec{E}_0}{R^3} = \frac{3(\vec{E}_0,\vec{R})}{R^2}\vec{R}.$$

Получим, что поле должно быть радиальным. Любое металлическое тело, помещенное во внешнее поле, является эквипотенциальным объемом, т. е. имеет одинаковый потенциал во всех точках. К эквипотенциальной поверхности поле всегда должно быть перпендикулярно. В данном случае получилось, что поле направлено по радиусу к эквипотенциальной поверхности.

$$\vec{E}(r)\Big|_{r=R} = \frac{3E_0 R\cos\theta R}{R^2} = E_0,$$

$$\cos\theta = \pm\frac{1}{3}.$$

1. Потенциал электрического поля

Потенциал электрического поля — это работа по перемещению пробного (единичного положительного) заряда из бесконечности в данную точку. По определению считается, что потенциал на бесконечности равен нулю. Рассмотрим ось X и две бесконечно близкие точки 1 и 2 (см. рис. 2.8).

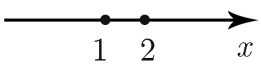

Рис. 2.8

В области этих точек есть некоторое поле E, которое имеет три компоненты $\vec{E}(E_x, E_y, E_z)$. Найдем элементарную работу по перемещению пробного единичного заряда из точки 1 в точку 2.

$$\delta A = \phi_1 - \phi_2 = E_x dx = -d\phi.$$

Отсюда следует:

$$E_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial\phi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial\phi}{\partial z},$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi.$$

Вектор $\vec{\nabla}$ указывает направление наибыстрейшего изменения потенциала. Если есть эквипотенциальная поверхность, то вектор $\vec{E}$ направлен под прямым углом к эквипотенциальной поверхности.

Вычислим распределение потенциала $\phi(r)$ однородно заряженного шара радиусом a с объемной плотностью заряда ρ. Вне шара получим

$$E = -\frac{d\phi}{dr}, \quad E(r) = \frac{q}{r^2}\Big|_{r \geqslant a},$$

$$\int d\phi = -\int \frac{q}{r^2}\,dr,$$

$$\phi(r) = \frac{q}{r} + \text{const}.$$

Значение константы найдем из граничного условия (ϕ_∞=0). Откуда следует, что const = 0. Тогда для точечного заряда и шара получим

$$\phi(r)\Big|_{r \geqslant a} = \frac{q}{r}.$$

Рассмотрим, как будет распределен потенциал внутри шара.

$$\phi(a) = \frac{q}{a} = \frac{4}{3}\pi\rho\frac{a^3}{a} = \frac{4}{3}\pi\rho a^2.$$

$$E(r)\Big|_{r \leqslant a} = \frac{4}{3}\pi\rho r,$$

$$\int\limits_a^r \frac{4}{3}\pi\rho r\,dr = -\int\limits_a^r d\phi,$$

$$\frac{4}{3}\pi\rho\frac{1}{2}(r^2 - a^2) = \phi(a) - \phi(r).$$

Отсюда следует

$$\phi(r)\Big|_{r \leqslant a} = \frac{3}{2}\frac{q}{a}\left(1 - \frac{r^2}{3a^2}\right).$$

Построим графики зависимости $\phi(r)$ и $E(r)$.

Рассмотрим шар с распределенным зарядом q (см. рис. 2.10). Поле внутри шара равно нулю. Если на поверхности есть заряд, то обязательно будет скачок поля.

$$\Delta E = 4\pi\sigma.$$

Потенциал будет меняться непрерывно и внутри шара будет постоянным.

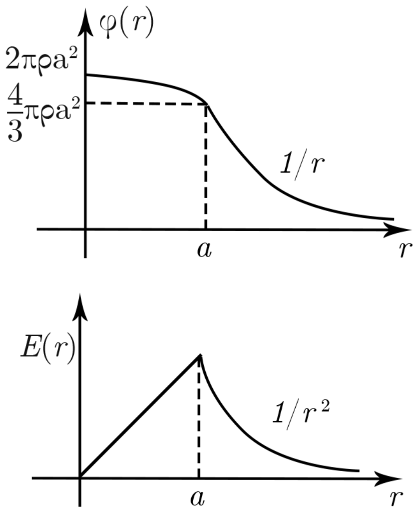

Рис. 2.9

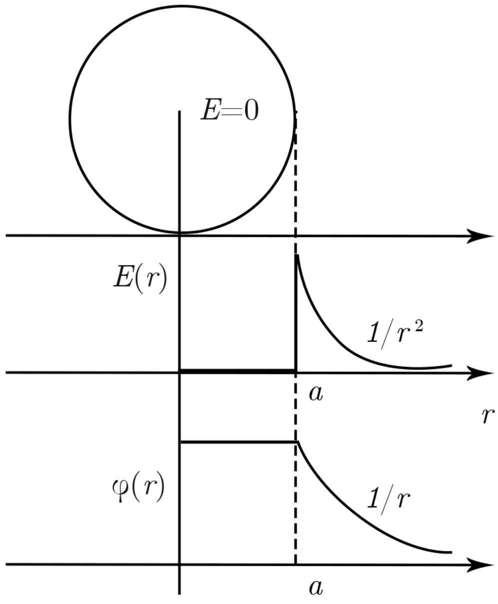

Рис. 2.10

Задача 2.5.

Вычислить распределение потенциала в плоском конденсаторе толщиной d, если одна обкладка заземлена, другая находится при потенциале ϕ_0, а в пространстве между ними распределен заряд с постоянной объемной плотностью ρ.

Решение.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть есть бесконечный слой толщиной d с объемной плотностью заряда ρ (см. рис. 2.12).

В плоскости $X = 0$ потенциал равен нулю. По теореме Гаусса получим

$$E(x)S = 4\pi\rho Sx.$$

Т. е. вне слоя поле однородно и равно $2\pi\rho d$. Вернемся к решению задачи. В этом

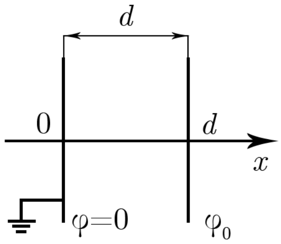

Рис. 2.11

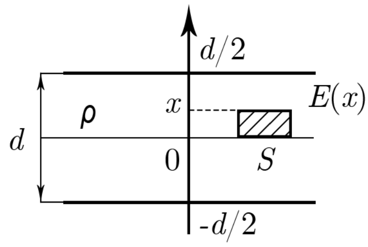

Рис. 2.12

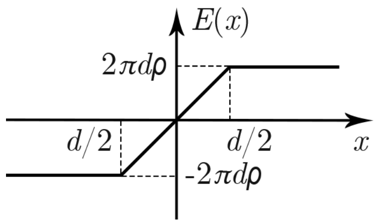

Рис. 2.13

случае получим

$$E(x) = 4\pi\rho\left(x - \frac{d}{2}\right),$$

где $E(x)$ — поле зарядов ρ. Поле в конденсаторе равно

$$E = -\frac{\phi_0}{d}, \quad (0 < x < d).$$

Проинтегрируем и получим значение потенциала.

$$\phi(x) = -4\pi\rho(\frac{x}{2} - \frac{d}{2})x + \frac{\phi_0}{d}x = \frac{\phi_0}{d}x - 2\pi\rho(x^2 - dx).$$

Задача 2.4.

Три концентрические тонкие металлические сферы радиусами $R_1 < R_2 < R_3$, находящиеся в вакууме, заряжены соответственно зарядами Q_1, Q_2, Q_3. В некоторой точке A между первой и второй сферами измеряют потенциал. Найти изменение потенциала в этой точке, если вторую и третью сферу замкнуть между собой.

Решение.

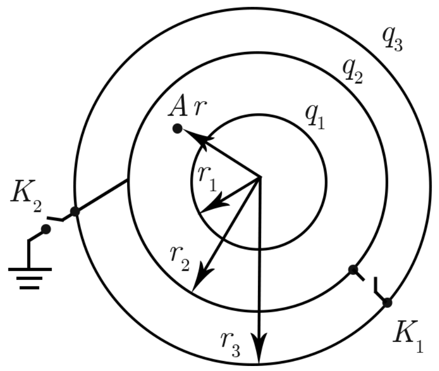

Рис. 2.14

Пусть ключ K_1 разомкнут. Тогда очевидно, что

$$\phi_1(A) = \frac{q_1}{r} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3}.$$

Действие зарядов передается через металлические сферы. Пусть ключ K_1 замкнут. Т. к. потенциал второй сферы станет равным потенциалу третьей сферы, то поля между сферами не будет. Значит, заряд q_2 перейдет на внешнюю сферу. На поверхности второй сферы появится заряд $-q_1$, а на внешней поверхности — $+q_1$. Тогда заряд на внешней сфере равен $q_3 + q_2 + q_1$, на средней $-q_1$, а на внутренней q_1.

Получим, что потенциал в точке A равен

$$\phi_2(A) = \frac{q_1}{r} + \frac{q_1 + q_2 + q_3}{r_3} - \frac{q_1}{r_2}.$$

Рассмотрим следующий случай. Заземлим внутреннюю сферу. Замкнем ключ K_2 после того как замкнули ключ K_1. На внутренней сфере появится некоторый заряд q^* такой, что

$$\phi_{1\text{сф}} = \frac{q_1^*}{r_1} - \frac{q_1^*}{r_2} + \frac{q_1^* + q_2 + q_3}{r_3} = 0.$$

Отсюда можно найти заряд q_1^* и посчитать потенциал $\phi_3(A)$. По сфере все заряды распределены равномерно, т. к. она симметрична. Для конуса это не так. Заряд на острие конуса будет наибольшим.

2. Метод изображений

Рассмотрим бесконечную металлическую незаряженную плоскость. Поместим точечный заряд q на расстоянии d от этой плоскости.

Рассмотрим, как будут взаимодействовать заряд и металлическая плоскость. Т. к. плоскость бесконечно протяженная, то $\phi = 0$. На плоскости будут индуцироваться заряды. Распределение заряда будет зависеть от расстояния r. Поле должно быть перпендикулярным эквипотенциальной поверхности.

Оказывается, если рассмотреть взаимодействие двух точечных зарядов $+q$ и $-q$ на расстоянии $2d$, то поле будет таким же.

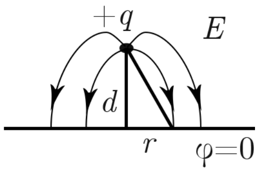

Рис. 2.15

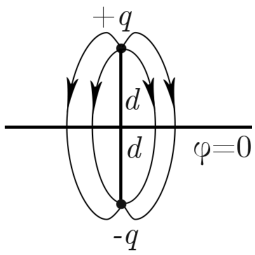

Рис. 2.16

Это означает, что взаимодействие точечного заряда и плоскости эквивалентно взаимодействию двух точечных зарядов. Сила взаимодействия равна

$$F = \frac{q}{(2d)^2}.$$

Заряд $-q$ называется **зарядом изображения**. По теореме Гаусса

$$\sigma(r) = \frac{E(r)}{4\pi}.$$

Значение $E(r)$ можно посчитать как суперпозицию полей зарядов $+q$ и $-q$.

Можно рассмотреть эту задачу в общем случае. Пусть есть много точечных зарядов (см. рис. 2.17).

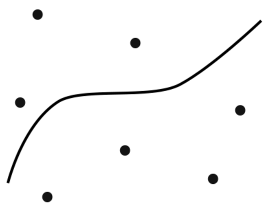

Рис. 2.17

Сквозь такую систему можно провести эквипотенциальную поверхность. Сделаем эту поверхность металлической. Тогда она останется эквипотенциальной и разделит заряды на две системы. В этом случае можно рассматривать задачу о взаимодействии зарядов как задачу о взаимодействии зарядов и поверхности.

Задача 2.20.

Определить силу притяжения между точечным зарядом q и металлическим шаром (см. рис. 2.18). Заряд находится на расстоянии d от центра шара. Рассмотреть два случая:

1) шар заземлен; 2) шар изолирован, а полный заряд его равен нулю.

Решение.

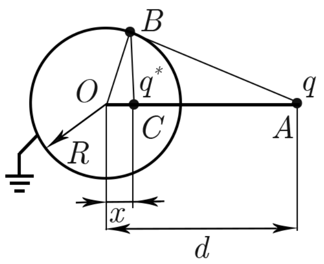

Рис. 2.18

Если шар заземлен, то его потенциал равен нулю. Такая задача сводится к задаче взаимодействия двух точечных зарядов. Заряд изображение q^* должен быть помещен в некоторую точку внутри сферы. Возьмем на поверхности сферы произвольную точку B. Проведем линии BO, BC, BA. Нужно, чтобы $\phi_B = 0$. Пусть $BC = b', BA = b$. Если треугольник ΔOBA подобен треугольнику ΔOBC, то

$$\frac{b'}{b} = \frac{r}{d},$$

$$\phi_B = \frac{q}{b} + \frac{q^*}{b^*} = 0,$$

$$q^* = -q\frac{b'}{b} = -q\frac{r}{d},$$

$$\frac{d}{r} = \frac{r}{x}.$$

Откуда получим:

$$q^* = -q\frac{r}{d},$$

$$x = \frac{r^2}{d}.$$

Рассмотрим диполь (см. рис. 2.19). Все силовые линии будут замкнуты.

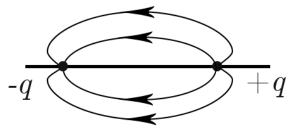

Рис. 2.19

Если же заряды не равны, то поле будет распределено следующим образом (см. рис. 2.20).

Силовые линии большего заряда будут уходить на бесконечность. В этом случае одной из эквипотенциальных поверхностей будет сфера.

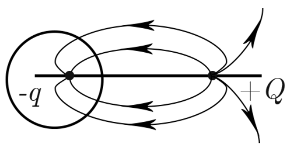

Рис. 2.20