ЛЕКЦИЯ 3

ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ. ДИЭЛЕКТРИКИ

На прошлой лекции был рассмотрен метод изображений. Было показано, что взаимодействие плоской металлической поверхности и точечного заряда можно свести к взаимодействию двух точечных зарядов. Взаимодействие металлической сферы или шара с точечным зарядом также можно свести к взаимодействию двух точечных зарядов, или трех зарядов, если сфера изолирована. В точку, смещенную относительно центра сферы на расстояние x, можно поместить некий заряд q, который будет отвечать за взаимодействие заряда Q и всей сферы (см. рис. 3.1).

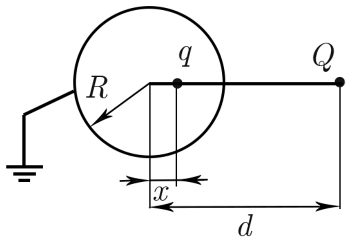

Рис. 3.1

Таким образом, задача сводится к задаче о взаимодействии двух точечных зарядов. Заряд q называется **изображением**.

$$q = -Q\frac{R}{d}, \quad x = \frac{R^2}{d}.$$

Если сфера не заземлена, то нужно использовать третий заряд, потому что в этом случае потенциал сферы равен $\frac{Q}{d}$ и не равен нулю. Этот дополнительный потенциал обеспечивается еще одним зарядом.

Задача 2.30.

Точечный заряд q помещен на расстоянии $R/2$ от центра полой тонкостенной металлической изолированной сферы радиусом R. Заряд сферы равен Q. Определить силу, действующую на заряд q, а также поверхностную плотность зарядов на внутренней и внешней поверхностях сферы в точках, ближайших к этому заряду.

Решение.

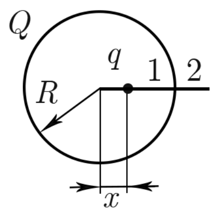

Рис. 3.2

Прежде чем приступать к решению этой задачи, рассмотрим следующий случай. Пусть заряд q находится в центре сферы (см. рис. 3.3).

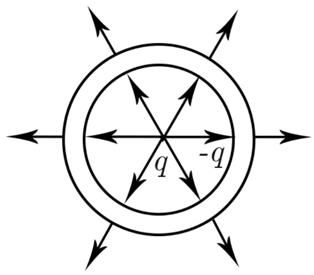

Рис. 3.3

На внутренней поверхности сферы будет равномерно распределен заряд $-q$. Поле внутри сферы будет радиальным. Однако в металле этой сферы электрического поля не будет. Заряд $-q$ индуцируется на внутренней поверхности сферы, значит, снаружи будет заряд $+q$. Он также будет распределен по поверхности равномерно. Таким образом, поле снаружи сферы будет, и оно тоже будет радиальным.

Пусть заряд находится не в центре сферы. В этом случае вся поверхность сферы останется эквипотенциальной. Поле внутри сферы будет выглядеть следующим образом (см. рис. 3.4).

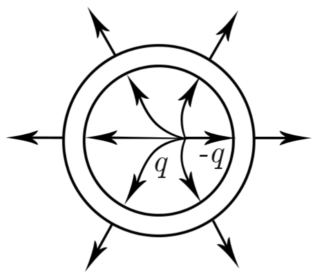

Рис. 3.4

Поверхностная плотность заряда внутри сферы справа будет больше, чем слева. Полная величина заряда останется прежней. Внутри металла поля не будет. Снаружи сферы будет однородно распределенный заряд $+q$. Поле снаружи останется радиальным и не будет зависеть от положения заряда q.

Рассмотрим поверхность сферы (см. рис. 3.5). Возьмем плоскость S.

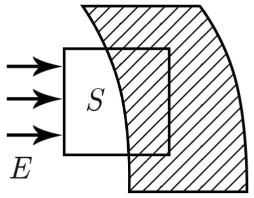

Рис. 3.5

Поля в металле нет. Тогда по теореме Гаусса получим

$$ES = 4\pi\sigma S,$$

где σ — поверхностная плотность индуцированных зарядов. Значит, поле вблизи поверхности равно

$$E = 4\pi\sigma.$$

Откуда следует

$$\sigma = \frac{E}{4\pi}.$$

Если снаружи добавить заряд Q, то изменится только поле снаружи. Возникнет дополнительный заряд, «помещенный» в центр сферы. Поле будет радиальным.

Перейдем к решению задачи 2.30. Из проведенных выше рассуждений очевидно, что

$$\sigma_2 = \frac{q+Q}{4\pi R^2}.$$

Воспользуемся методом изображений, только будем считать, что реальный заряд q, а его изображение — Q_1.

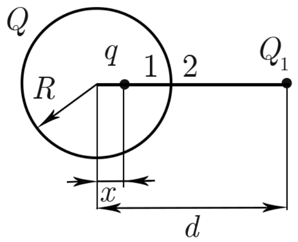

Рис. 3.6

Тогда получим:

$$q = -Q_1\frac{R}{d}, \quad x = \frac{R}{2} = \frac{R^2}{d},$$

$$d = 2R, \quad Q_1 = -2q.$$

Оказывается, что заряд Q не учитывается при взаимодействии заряда q и сферы. Поэтому сила взаимодействия равна

$$F = \frac{qQ_1}{(d - \frac{R}{2})^2} = -\frac{2q^2}{(\frac{3}{2}\,R)^2} = -\frac{8}{9}\frac{q^2}{R^2}.$$

Причем F — сила притяжения. Найдем значение σ_1. Т. к. заряды q и Q_1 противоположных знаков, то получим, что поле вблизи точки 1 равно

$$E_{(1)} = \frac{q}{(\frac{R}{2})^2} + \frac{2q}{R^2} = \frac{q}{R^2}.$$

По теореме Гаусса

$$E_{(1)} = 4\pi\sigma_1, \quad \Rightarrow \quad \sigma_1 = \frac{E_{(1)}}{4\pi} = -\frac{3q}{2\pi R^2}.$$

Задача 2.33.

В центре проводящей сферы радиусом R находится точечный электрический диполь с моментом p (см. рис. 3.7). Определить напряженность поля в точках A и B на внутренней поверхности сферы.

Решение.

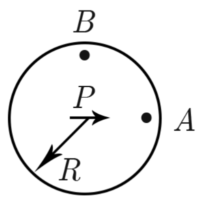

Рис. 3.7

Диполь — это два точечных заряда различных знаков. Слева отрицательный заряд, справа — положительный. Очевидно, что

$$l \ll R,$$

где l — плечо диполя.

Рассмотрим заряды $+q$ и $-q$ отдельно. Тогда для заряда $+q$ заряд изображение будет $-Q$, а для заряда $-q$ — $+Q$. Заряды $+Q$ и $-Q$ помещены на одинаковом расстоянии (см. рис. 3.8).

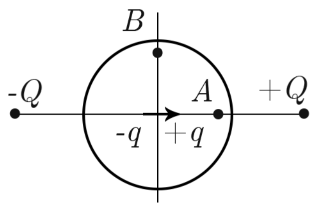

Рис. 3.8

$$|Q| = q\frac{d}{R}, \quad d = \frac{R^2}{x}.$$

x — величина смещения заряда, $x = \frac{l}{2}$. Тогда получим

$$d = \frac{2R^2}{l}, \quad |Q| = \frac{2qR}{l}.$$

Запишем поле диполя в точках A и B.

$$E_{\text{дип}}(A) = \frac{2p}{R^3}, \quad E_{\text{дип}}(B) = -\frac{p}{R^3}.$$

Также нужно учесть поле зарядов $+Q$ и $-Q$. Т. к. $l \ll R$, то поле зарядов Q в точке A не отличается от поля в точке B и равно полю в центре сферы.. Тогда поле можно считать однородным во всем объеме и равным полю в центре сферы.

$$E_{|Q|} = \frac{2|Q|}{d^2} = 2\frac{l^2 2qR}{4R^4 l} = \frac{ql}{R^3} = \frac{p}{R^3}.$$

$$E(A) = E_{\text{дип}}(A) + E_{|Q|} = \frac{3p}{R^3},$$

$$E(B) = E_{\text{дип}}(B) + E_{|Q|} = 0.$$

1. Поле в веществе. Диэлектрики

Можно выделить два типа диэлектриков. Первый тип — **полярные молекулы**. Примером такой молекулы является молекула H_2O (см. рис. 3.9).

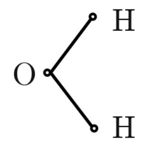

Рис. 3.9

Во внешнем поле молекулы разворачиваются, и среда поляризуется.

Есть молекулы другого вида, которые неполярны сами по себе.

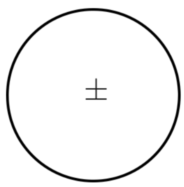

Рис. 3.10

Заряды + и - находятся «в одной точке». Молекула не обладает дипольным моментом и является электрически нейтральной. Однако во внешнем поле электронные оболочки деформируются и вытягиваются (см. рис. 3.11).

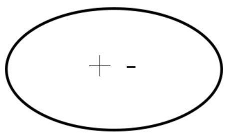

Рис. 3.11

Центр масс электронов смещается относительно центра масс положительных зарядов. Молекула приобретает дипольный момент, и диэлектрик поляризуется.

Рассмотрим однородную поляризацию. Поместим диэлектрик во внешнее поле E (см. рис. 3.12).

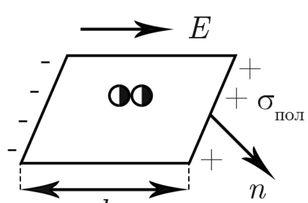

Рис. 3.12

Внутри диэлектрика заряды компенсируют друг друга, а на поверхности появляется поляризационный заряд. Такие системы приобретают макроскопический дипольный момент. Плечо равно l. Введем **вектор поляризации** $\vec{P}$. Вектор поляризации — **дипольный момент единицы объема**.

$$\vec{P} = \frac{q_{\text{пол}}\vec{l}}{V} = \frac{\sigma_{\text{пол}}S\vec{l}}{(\vec{l},\vec{n})S}.$$

Проекция вектора $\vec{P}$ на нормаль равна

$$P_n = \frac{\sigma_{\text{пол}}(\vec{l},\vec{n})}{(\vec{l},\vec{n})} = \sigma_{\text{пол}}.$$

Вспомним теорему Гаусса.

$$\oint\limits_S \vec{E}\,d\vec{S} = 4\pi(q + q_{\text{пол}}).$$

Найдем $q_{\text{пол}}$. Пусть есть некоторая поверхность S (см. рис. 3.13). В этой поверхности лежит объем V.

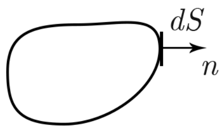

Рис. 3.13

Если поместить вещество во внешнее поле, то внутри объема появится заряд $q_{\text{пол}}$.

$$q_{\text{пол}} = -\oint\limits_S \sigma_{\text{пол}}\,dS = -\oint\limits_S (\vec{P}\,d\vec{S}).$$

Тогда получим

$$\oint\limits_S (\vec{E} + 4\pi\vec{P})dS = \oint\limits_S \vec{D}\,dS = 4\pi q,$$

где D — **вектор электрической индукции**. Заметим, что в гауссовской системе единиц вектора $\vec{D}, \vec{E}$ и $\vec{P}$ имеют одну и туже размерность, что не так в СИ.

$$\vec{P} = \alpha\vec{E},$$

где α — **поляризуемость среды**. Если среда изотропна, то α — число, если анизотропна — матрица 3×3. В этом случае $\vec{D}$ неколлинеарен вектору $\vec{E}$.

$$\vec{D} = \epsilon\vec{E},$$

где ϵ — **диэлектрическая проницаемость среды**. ϵ может быть как числом, так и тензором.

$$\epsilon = 1 + 4\pi\alpha.$$

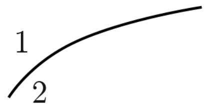

Рис. 3.14

Это соотношение называют **уравнением материальных связей**. Рассмотрим границу раздела двух сред (см. рис. 3.14).

Запишем граничные условия.

$$E_{1t} = E_{2t}, \quad D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma.$$

Тангенциальная компонента вектора E непрерывна. Это следствие того, что поле E потенциально. σ — поверхностная плотность свободных зарядов. Если их нет, то

$$D_{1n} = D_{2n}.$$

Запишем теорему Гаусса в интегральном и дифференциальных видах.

$$\oint\limits_S \vec{D}\, d\vec{S} = 4\pi q,$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho,$$

$$\oint\limits_S \vec{E}\, d\vec{S} 4\pi \int\limits_V \rho\, dV = \int\limits_V \operatorname{div} \vec{E}\, dV.$$

Получим связь поверхностного интеграла с объемным. Тогда справедливо

$$\oint\limits_S \vec{P}\, d\vec{S} = \int\limits_V \operatorname{div} \vec{P}\, dV = -q_{\text{пол}} = -\int\limits_V \rho_{\text{пол}}\, dV.$$

Отсюда следует

$$\rho_{\text{пол}} = -\operatorname{div} \vec{P},$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi(\rho + \rho_{\text{пол}}),$$

$$\operatorname{div}(\vec{E} + 4\pi\vec{P}) = 4\pi\rho,$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho.$$

Существуют диэлектрики, которые будучи помещенными во внешнее магнитное поле остаются поляризованными, когда поля нет. Такие вещества называются **сегнетоэлектриками**, а поляризация называется **замороженной**. Есть вещества, на поверхности которых из-за сжатия возникают поляризационные заряды. Такие вещества называются **пьезоэлектриками**. Если подвести переменное электрическое поле, то на поверхности возникнут заряды, и пьезоэлектрик начнет сжиматься и разжиматься. Таким образом, подведя переменное электрическое поле, можно возбудить колебания.

Задача 3.10.

Диэлектрический образец с замороженной поляризацией P имеет форму полого цилиндра с разрезом. На рис. 3.15 показано сечение этого цилиндра и направление вектора поляризации. Толщина стенки цилиндра $h \ll R$ (R — радиус цилиндра), ширина разреза $l \ll R$. Найти электрическое поле E и индукцию D в точке A.

Решение.

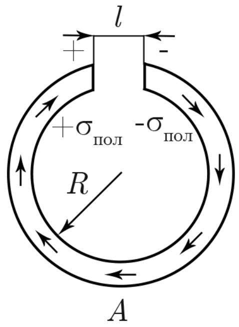

Рис. 3.15

Т. к. цилиндр достаточно длинный, то можно рассмотреть две поверхности $\sigma_{\text{пол}}$ как две заряженные нити (см. рис. 3.16).

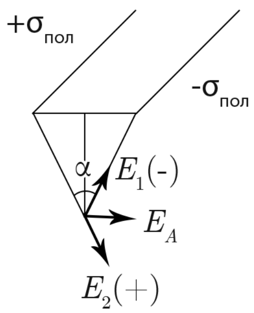

Рис. 3.16

κ — **погонная плотность заряда**.

$$\kappa_{\text{пол}} = \sigma_{\text{пол}} h = Ph.$$

Найдем поле в точке A, как суперпозицию полей положительного и отрицательного зарядов.

$$E_{A(\pm)} = \frac{2\kappa}{r} = \frac{2\kappa}{2R} = \frac{\kappa}{R} = \frac{Ph}{R}.$$

$$E_A = 2E_1\frac{\alpha}{2} = \frac{Ph}{R}\alpha, \quad \alpha \approx \frac{l}{2R},$$

$$E_A = \frac{Phl}{2R^2},$$

$$\vec{E}_A = -\frac{hl}{2R^2}\vec{P},$$

$$\vec{D}_A = \vec{E}_A + 4\pi\vec{P} = (4\pi - \frac{hl}{2R^2})\vec{P}.$$

Задача 3.7.

Имеется тонкий длинный диэлектрический цилиндр длиной $2l$ и радиусом r с «замороженной» поляризацией $P_0 = \text{const}$. Найти напряженность электрического поля в точке A. Во сколько раз это поле сильнее, чем в точке B (см. рис. 3.17)?

Решение.

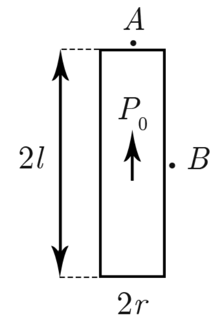

Рис. 3.17

Рассмотрим как выглядят поля E и D внутри цилиндра с «замороженной» поляризацией. Вспомним граничные условия. Для вектора D поле будет непрерывным (см. рис. 3.18).

$$D_{1n} = D_{2n}.$$

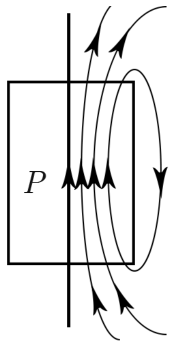

Рис. 3.18

Поле E внутри диэлектрика будет направлено в противоположную сторону (см. рис. 3.19). Должно выполняться

$$E_{1t} = E_{2t}, \quad \vec{E} = \vec{D} - 4\pi\vec{P}.$$

Вблизи торцов цилиндра получим

$$\sigma = \pm P_0, \quad \sigma_A = P_0,$$

$$E_A = 2\pi\sigma_{\text{пол}} = 2\pi P_0.$$

В точке B другие граничные условия. Внутри $E_{1t} = E_{2t}$. Тогда поле E_B — это поле двух точечных зарядов.

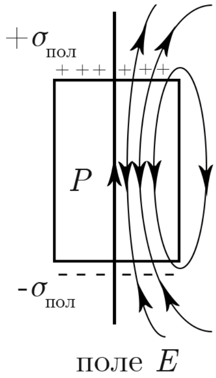

Рис. 3.19

$$E_B = 2\frac{\sigma_{\text{пол}}\pi r^2}{l^2} = \frac{2\pi\sigma_{\text{пол}} r^2}{l^2},$$

$$\frac{E_A}{E_B} = \frac{2\pi\sigma_{\text{пол}} l^2}{2\pi\sigma_{\text{пол}} r^2} = \left(\frac{L}{r}\right)^2.$$