ЛЕКЦИЯ 4

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ДИЭЛЕКТРИКАХ. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

На прошлой лекции было показано, что в отсутствии свободных зарядов поле D не обращается в ноль. Из теоремы Гаусса следует, что

$$\oint\limits_S \vec{D}\,d\vec{S} = 4\pi q.$$

Если q=0, то это не означает, что $D = 0$. Поток через любую замкнутую поверхность вектора D равен нулю. Однако этого нельзя сказать про напряженность электрического поля E. Для него будет справедливо следующее соотношение:

$$\oint\limits_S \vec{E}\,d\vec{S} = 4\pi(q + q_{\text{пл}}),$$

где $q_{\text{пл}}$ — **поляризационный заряд**. Источником поля E являются также и поляризационные заряды.

Задача 3.65.

Плоский конденсатор подключен к источнику напряжения V. Расстояние между пластинами конденсатора равно $2h$. В конденсатор вставлена пластина толщиной h с диэлектрической проницаемостью ϵ. Найти циркуляцию вектора D по контуру L.

Решение.

Циркуляция вектора E по контуру равна нулю, т. к. поле потенциально.

$$\oint \vec{E}\,d\vec{l} = 0.$$

Тогда справедливо равенство

$$\oint \vec{D}\,d\vec{l} = \oint (\vec{D} - \vec{E})\,d\vec{l} = (D - E)h.$$

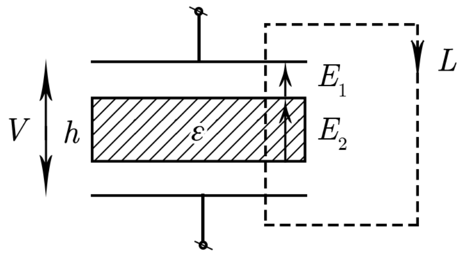

Рис. 4.1

Вне конденсатора поля E и D совпадают, в диэлектрике — нет.

$$E_1 = D = 4\pi\sigma,$$

$$E_2 = \frac{D}{\epsilon} = \frac{4\pi\sigma}{\epsilon}.$$

Найдем разность потенциалов между обкладками конденсатора.

$$V = E_1 h + E_2 h = (4\pi\sigma + \frac{4\pi\sigma}{\epsilon})h = 4\pi\sigma h(\frac{\epsilon+1}{\epsilon}),$$

$$4\pi\sigma h = \frac{\epsilon V}{\epsilon + 1}.$$

Откуда следует, что

$$\oint \vec{D}\,d\vec{l} = \oint (\vec{D} - \vec{E})\,d\vec{l} = (D-E)h = 4\pi\sigma h(1 - \frac{1}{\epsilon}) = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1}V.$$

Задача 3.23.

У плоской поверхности однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью ϵ напряженность электрического поля в вакууме равна E_0, причем вектор E_0 составляет угол θ с нормалью к поверхности диэлектрика (см. рис. 4.2). Считая поле внутри и вне диэлектрика однородным, найти: 1) поток Φ_E вектора E через сферу радиусом R с центром на поверхности диэлектрика; 2) циркуляцию вектора D по прямоугольному контуру Г со сторонами длиной l_1 и l_2, плоскость которого перпендикулярна к поверхности диэлектрика и параллельна вектору E_0.

Решение.

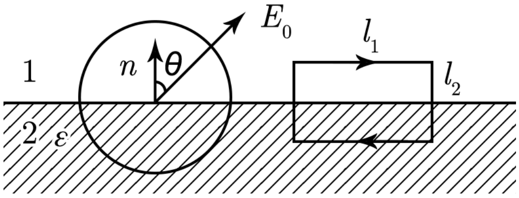

Рис. 4.2

Поток вектора D через сферу равен нулю, т. к. нет свободных зарядов. Циркуляция вектора E также равна нулю.

$$\oint \vec{D}\,d\vec{S} = 0, \quad \oint \vec{E}\,d\vec{l} = 0.$$

Поле E определяется не только свободными зарядами, но и поляризационными. Свободных зарядов нет, однако поляризационные присутствуют на границе раздела двух сред. Сфера отсекает круг радиуса R, на котором расположены поляризационные заряды.

$$\sigma_{\text{пол}} = P_n = P\cos\theta.$$

Рассмотрим граничные условия:

$$D_{1n} = D_{2n} = E_{1n} = \epsilon E_{2n}.$$

$$D_{2n} = \epsilon E_{2n} = E_{2n} + 4\pi P_n,$$

$$P_n = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} E_{2n} = \frac{\epsilon - 1}{4\pi}\frac{E_{1n}}{\epsilon} = \frac{\epsilon - 1}{4\pi\epsilon} E_0\cos\theta = \sigma_{\text{пол}}.$$

Таким образом, по теореме Гаусса поток вектора E через поверхность равен

$$\oint \vec{E}\,d\vec{S} = \underbrace{\pi R^2\sigma_{\text{пол}}}_{q_{\text{пол}}} \cdot 4\pi = \pi R^2\frac{E_0\cos\theta(\epsilon - 1)}{\epsilon}.$$

Задача 3.31.

В подключенный к батарее плоский конденсатор вставляют две пластины из сегнетоэлектрика ($\epsilon = 100$) таким образом, что между ними остается небольшой зазор (см. рис. 4.3). При какой величине зазора h поле в нем будет в 50 раз больше, чем в отсутствии диэлектрика? Расстояние между обкладками конденсатора $d = 2$ см.

Решение.

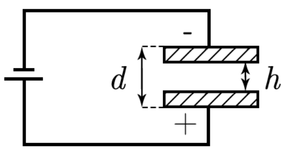

Рис. 4.3

Поле E_0 без диэлектрика равно

$$E_0 = \frac{V}{d}.$$

Тогда поле в зазоре равно

$$E_{\text{заз}} = n\frac{V}{d}.$$

Пусть $E_{\text{д}}$ — поле в диэлектрике. Тогда получим

$$V = E_{\text{д}}(d - h) + E_{\text{заз}}h = \frac{E_{\text{заз}}}{\epsilon}(d - h) + E_{\text{заз}}h = \frac{nV}{\epsilon d}(d - h) + n\frac{V}{d}h.$$

Отсюда следует

$$\epsilon d = nd - nh + n\epsilon h, \quad \Rightarrow \quad h = \frac{\epsilon - n}{\epsilon - 1}\frac{d}{n} = \frac{100-50}{99}\frac{2}{50} \approx 0{,}02 \text{ см.}$$

Задача 3.24.

Металлический шар радиусом 5 см окружен шаровым слоем диэлектрика ($\epsilon = 7$) толщиной 1 см и помещен концентрично в металлической сфере с внутренним радиусом 7 см. Чему равна емкость такого конденсатора?

Решение.

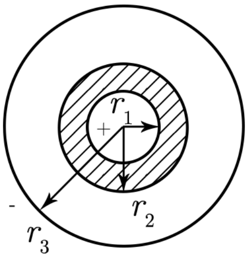

Рис. 4.4

Пусть поле направленно из центра шара.

$$C = \frac{q}{\Delta\phi_{AB}}, \quad \Delta\phi_{AB} = \int\limits_B^A d\phi = -\int\limits_B^A e\,dr.$$

Проведем некоторую поверхность радиуса r между сферами радиуса r_1 и r_2. По теореме Гаусса

$$\oint D\,dS = \oint \epsilon E\,dS = \epsilon E(r) 4\pi r^2 = 4\pi q,$$

где q — заряд внутренней обкладки. Отсюда следует, что

$$E(r) = \frac{q}{\epsilon r^2},$$

$$\Delta\phi_{AB} = \int\limits_B^A d\phi = -\int\limits_B^A E\,dr = -\int\limits_{r_2}^{r_1} \frac{q}{Er^2}\,dr - \int\limits_{r_3}^{r_2} \frac{q}{r^2}\,dr = \frac{q}{\epsilon}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) + q\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}\right).$$

Окончательно получим:

$$C = \frac{q}{\Delta\phi_{AB}} = \frac{1}{\frac{r_2 - r_1}{\epsilon r_1 r_2} + \frac{r_3 - r_2}{r_2 r_3}} = \frac{1}{\frac{1}{7\cdot 5\cdot 6} + frac16 \cdot 7} = 35 \text{ см} \approx 40 \text{ пФ}.$$

В гауссовской системе емкость измеряется в сантиметрах (1 см$=9\cdot 10^{-11}$ Ф).

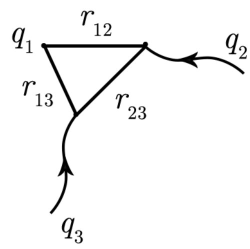

Рис. 4.5

1. Энергия электрического поля

Точечный заряд образует поле, однако энергии этого поля нет. Энергия появляется, когда происходит взаимодействие двух или более зарядов.

Рассмотрим элементарный заряд. В классической физике используется понятие **классического радиуса электрона**.

$$mc^2 = \frac{e^2}{r_{\text{кл}}}, \quad r = 2{,}8 \cdot 10^{-13} \text{ см}.$$

Возникает вопрос, как распределен заряд по электрону. Можно предположить, что заряд распределен по поверхности (как по сфере) или же по объему. В зависимости от этого перед $\frac{e^2}{r_{\text{кл}}}$ появляются разные коэффициенты.

Работа по перемещению заряда q_2 равна

$$A_{12} = \frac{q_1 q_2}{r_1 2}.$$

Если добавить третий заряд, то получим

$$A = \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} = W_{\text{эл}},$$

где $W_{\text{эл}}$ — энергия электрического поля.

$$W_{\text{эл}} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_i q_i \phi_i,$$

где ϕ_i — поле всех зарядов, кроме i-го в точке, где находится этот заряд. Коэффициента $\frac{1}{2}$ появляется т. к. $q_i q_j = q_j q_i$.

$$W_{\text{эл}} = \frac{1}{2} \int\limits_V \phi \rho \, dV = \frac{1}{2} \int\limits_S \phi \sigma \, dS.$$

Гораздо удобнее подсчитывать энергию через электрическое поле. Рассмотрим плоский конденсатор (см. рис. **??**).

Внутри конденсатора есть поле E. Возьмем на левой обкладке заряд dq и перенесем его на правую обкладку. Работа внешних сил равна:

$$\delta A^{\text{ внеш}} = \frac{q}{C} \, dq = dW_{\text{эл}},$$

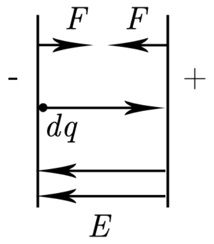

Рис. 4.6

$$W_{\text{эл}} = \frac{q^2}{2C} = \frac{qU}{2} CU^2 2,$$
$$E = \frac{U}{d} = 4\pi \frac{q}{C}.$$

Тогда получим:

$$W_{\text{эл}} = \frac{\epsilon E^2}{8\pi} Sd,$$

где S — площадь пластины, d — расстояние между пластинами.

$$w_{\text{эл}} = \frac{W_{\text{эл}}}{V} = \frac{\epsilon E^2}{8\pi} = \frac{D}{8\pi}\frac{(\vec{E}, \vec{D})}{8\pi}.$$
$$w_{\text{эл}} = \left[\frac{\text{эрг}}{\text{см}^3}\right] = \left[\frac{\text{дин}}{\text{см}^2}\right].$$

$w_{\text{эл}}$ — **плотность энергии электрического поля**. Заметим, что

$$\frac{F}{S} = \frac{\epsilon E^2}{8\pi} = w_{\text{эл}}.$$

Сила F всегда направлена в область большего поля. Рассмотрим металлическую пластинку (см. рис. **??**).

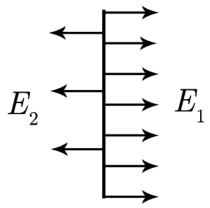

Рис. 4.7

Пусть $E_1 > E_2$. Такое возможно, если поместить заряженную пластину в конденсатор. Тогда с одной стороны пластинки поле будет больше, а с другой стороны — меньше.

$$f = \frac{F}{S} = w_1 - w_2.$$

В курсе электричества доказывается теорема:

$$W_{\text{эл}} = \frac{1}{2}\int\limits_V \phi\rho\, dV = \frac{1}{2}\int\limits_S \phi\sigma\, dS = \int\limits_V \frac{E^2}{8\pi}\, dV.$$

Рассмотрим плоский конденсатор, заполненный жидким диэлектриком. Граница раздела параллельна пластинам конденсатора. Пусть заряд на пластинах остается постоянным ($q = \text{const}$).

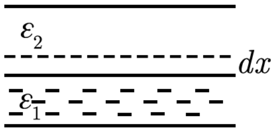

Рис. 4.8

$$f = w_2 - w_1 = \frac{D^2}{8\pi}\left(\frac{1}{\epsilon_2} - \frac{1}{\epsilon_1}\right).$$

Если $\epsilon_1 > \epsilon_2$, то диэлектрик втягивается в область между пластинами.

Рассмотрим случай, когда пластины расположены вертикально (см. рис. 4.9).

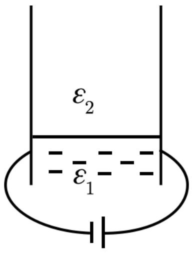

Рис. 4.9

Подключим конденсатор к источнику и будем поддерживать постоянную разность потенциалов $V = \text{const}$. Тогда поле будет втягиваться в область ϵ_2 ($\epsilon_1 > \epsilon_2$).

$$f = w_1 - w_2 = \frac{E^2}{8\pi}(\epsilon_1 - \epsilon_2).$$

Задача 3.59.

Диэлектрическая пластина толщиной l_2 и диэлектрической проницаемостью ϵ введена между обкладками плоского воздушного конденсатора (см. рис. 4.10). Между поверхностями пластины и обкладками конденсатора остались воздушные зазоры, суммарная толщина которых равна l_1. Определить силу притяжения F между обкладками, если разность потенциалов между ними равна V, а площадь пластин S. Как изменится выражение для F в предельном случае $l_1 \to 0$?

Решение.

Снаружи конденсатора поле отсутствует. В отсутствии диэлектрика плотность силы равна

$$f = w = \frac{E^2}{8\pi},$$

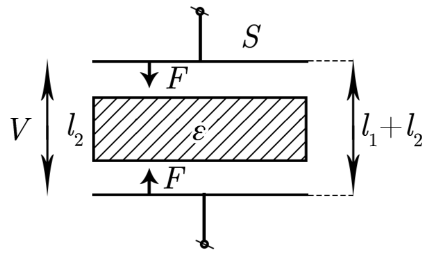

Рис. 4.10

$$F = fS = \frac{E^2}{8\pi}S.$$

Из граничных условий получим:

$$D_1 = D_2,$$

$$\epsilon_1 E_1 = \epsilon_2 E_2, \quad \Rightarrow \quad E_1 = \epsilon E_2.$$

$$V = V_1 + V_2 = E_1 l_1 + E_2 l_2 = E_1 l_1 + \frac{1}{\epsilon} E_1 l_2.$$

Отсюда следует:

$$E_1 = \frac{V\epsilon}{\epsilon l_1 + l_2}, \quad F == \frac{E_1^2 S}{8\pi} = \frac{V^2\epsilon^2 S}{8\pi(l_2+\epsilon l_1)^2}.$$

Задача 3.43.

Вычислить электростатическую энергию шара, заряд которого равномерно распределен по его объему.

Решение.

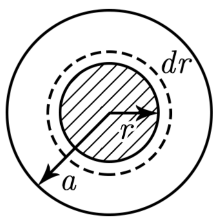

Рис. 4.11

Пусть ρ — объемная плотность заряда.

$$W_{\text{эл}} = \int\limits_0^a \frac{1}{2}\phi(r) 4\pi r^2 \rho \, dr.$$

$$\phi(r) = 2\pi\rho a^2 (1 - \frac{r^2}{3a^2}).$$

Отсюда следует

$$W_{\text{эл}} = \frac{16}{15}\pi^2\rho^2 a^5.$$

Суммарный заряд сферы равен

$$Q = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho.$$

Тогда

$$W_{\text{эл}} = \frac{3}{5}\frac{Q^2}{a}.$$

Если заряд распределен по поверхности сферы, то

$$W_{\text{эл}} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{a}.$$

Задача 3.50.
По сфере радиусом R равномерно распределен заряд Q. Определить давление изнутри на поверхность сферы, обусловленное взаимодействием зарядов.
Решение.

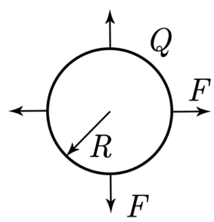

Рис. 4.12

Поле внутри отсутствует. Значит, **пондеромоторные силы** направлены в область большего поля. С другой стороны, давление вызвано взаимодействием одинаковых зарядов.
Способ 1 (Метод виртуальных перемещений).

Энергия электрического поля равна

$$W_{\text{эл}} = \frac{Q\phi}{2} = \frac{Q^2}{2r}.$$

Придадим радиусу R виртуальное перемещение.

$$R \to R + \delta R.$$

Тогда новая энергия равна

$$W'_{\text{эл}} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{R+\delta R} = \frac{Q^2}{2R(1+\frac{\delta R}{R})} \approx W_{\text{эл}}(1 - \frac{\delta R}{R}) \approx W_{\text{эл}} + A,$$

где A — работа, совершенная при растягивании сферы. Таким образом, энергия уменьшается за счет работы сил давления.

$$A = -W\frac{\delta R}{R}.$$

С другой стороны,

$$A = -P4\pi R^2\delta R = -W_{\text{эл}}\frac{\delta R}{R}.$$

Отсюда следует

$$P = \frac{Q^2}{8\pi R^4}.$$

Способ 2

$$P = W = \frac{E^2}{8\pi} = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{Q}{R^2}\right)^2 = \frac{Q^2}{8\pi R^4}.$$

Способ 3

Рассмотрим сферу и на сфере мысленно вырежем маленький диск.

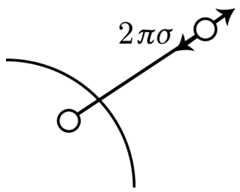

Рис. 4.13

Вынесем его за пределы сферы. Диск имеет плотность заряда σ. Поле вокруг диска равно

$$E_{\text{соб}} = 2\pi\sigma,$$

где $E_{\text{соб}}$ — собственное поле диска. Этот диск находится во внешнем поле. $E_{\text{внеш}}$ — поле всех зарядов сферы, кроме диска.

Снаружи: $E_{\text{внеш}} + E_{\text{соб}} = 4\pi\sigma$.

Внутри: $E_{\text{внеш}} - E_{\text{соб}} = 0$.

Тогда давление на единицу поверхности равно

$$P = \sigma E_{\text{внеш}} = 2\pi\sigma^2 = 2\pi\left(\frac{Q}{4\pi R^2}\right)^2 = \frac{Q^2}{8\pi R^4}.$$