ЛЕКЦИЯ 5

ДИЭЛЕКТРИКИ. ОБЪЕМНЫЕ ТОКИ

1. Диэлектрики

Задача 3.53.

Заряженный непроводящий шар радиуса $R = 4$ см разделен пополам. Шар находится во внешнем однородном поле $E_0 = 300$ В/см, направленному перпендикулярно плоскости разреза. Определить силу F, с которой отталкиваются половины шара.

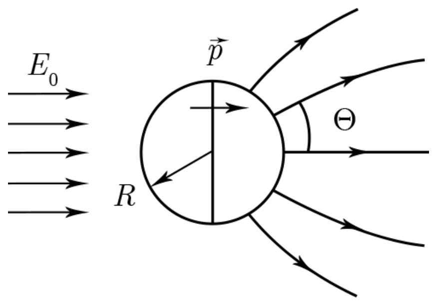

Рис. 5.1

Решение.

Поскольку шар проводящий, то внутри него нет поля. Но он обладает дипольным моментом.

$$\vec{E}_ш\Big|_{r=R} = \vec{E}_0 + \frac{3(\vec{P}\vec{R})\vec{R}}{R^5} - \frac{\vec{P}}{R^3}.$$

Металлический шар в целом поляризован. Следовательно, $\vec{P} = R^3\vec{E}_0$.

$$\vec{E}_ш\Big|_{r=R} = \vec{E}_0 + \frac{3(\vec{E}_0\vec{R})R^3\vec{R}}{R^5} - \frac{R^3\vec{E}_0}{R^3} = 3E_0\cos\Theta\frac{\vec{R}}{R}.$$

Выделим в шаре кольцо, на который действует сила давления f, продольная компонента которой равна плотности энергии электрического поля.

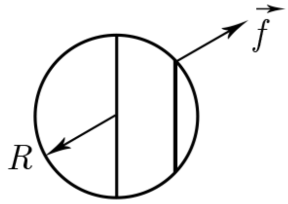

Рис. 5.2

$$f_\parallel = W_{эл} = \frac{E_ш^2}{8\pi}\cos\Theta = \frac{9}{8\pi}E_0^2\cos^3\Theta.$$

Проинтегрируем $f_\parallel$ по площади кольца:

$$F_{полн} = \int f_\parallel\, 2\pi R\sin\Theta\, R\, d\Theta = \frac{9E_0^2}{8\pi}2\pi R^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\Theta\,\sin\Theta\, d\Theta = \frac{9}{4}E_0^2R^2\frac{\cos^4\Theta}{4}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^0 =$$

$$= \frac{9}{16}E_0^2R^2 = \frac{9}{16}1^2 4^2 = 9\text{ дин}.$$

Задача 3.63.

Плоский конденсатор в квадратными пластинами площадью S и расстоянием между пластинами d заряжен до напряжения V и отсоединен от источника (заряд постоянен). После этого в него вдвинули диэлектрическую пластину с диэлектрической проницаемостью ϵ на половину размера. С какой силой F втягивается эта пластина в конденсатор?

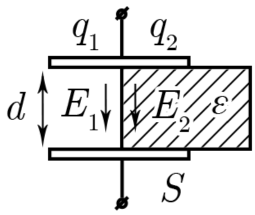

Рис. 5.3

Решение.

Заряд постоянен:

$$q = CV = \frac{VS}{4\pi d} = \text{const}.$$

Граничное условие для тангенциальной компоненты поля E: $E_{1t} = E_{2t}$. Значит, для поля E в разных областях пространства внутри конденсатора выполняется: $E_1 = E_2$. Напоминаем, что для нормальной компоненты поля D граничные условия ставятся следующим образом: $D_{1\text{n}} - D_{2\text{n}} = 4\pi\sigma$.

Поскольку

$$E_1 = E_2 = \frac{D_2}{\epsilon}, \quad E_1 = \frac{4\pi q_1}{S/2}, \quad E_2 = \frac{4\pi q_2}{S/2\,\epsilon},$$

то

$$q_1 = \frac{q_2}{\epsilon}.$$

Полный заряд равен сумме зарядов q_1 и q_2:

$$q = q_1 + q_2 = \frac{q_2}{\epsilon} + q_2 = q_2\frac{\epsilon+1}{\epsilon},$$

$$q_1 = \frac{q}{\epsilon+1}, \quad q_2 = \frac{q\epsilon}{\epsilon+1}.$$

$$E_1 = 4\pi\sigma_1 = \frac{4\pi q_1}{S/2} = \frac{8\pi q}{S(\epsilon+1)} = \frac{2V}{d(\epsilon+1)}.$$

Плотность энергии в данном случае будет равняться разности плотностей энергии с двух сторон:

$$W_1 = \frac{E_1^2}{8\pi} = \frac{4V^2}{8\pi d^2(\epsilon+1)^2}, \quad W_2 = \frac{\epsilon E^2}{8\pi} = \frac{\epsilon V^2}{2\pi d^2(\epsilon+1)^2}.$$

Сила:

$$F = \sqrt{S}d(W_2 - W_1) = \sqrt{S}d\frac{(\epsilon-1)V^2}{2\pi d^2(\epsilon+1)^2}.$$

Задача 3.67.

Конденсатор переменной емкости состоит из двух неподвижных металлических пластин-полудисков, находящихся на расстоянии d друг от друга и диэлектрической пластины с диэлектрической проницаемостью ϵ, которая находится между ними. Полукруг имеет радиус R. Зазоры между пластинами и диэлектриком считаются предельно малыми. Конденсатор заряжен до напряжения V. Найти момент сил, действующих на диэлектрическую пластину.

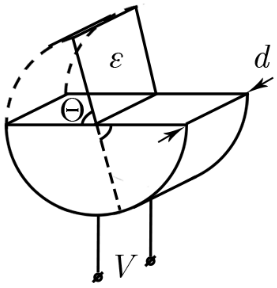

Рис. 5.4

Решение.

Возможны два случая:

1. $V = \text{const}$;

2. $q = \text{const}$.

Рассмотрим первый случай (источник подключен). Пусть пластина выдвинется на угол $d\Theta > 0$. Распишем работу батареи, которая будет складываться из работы по изменению угла и изменения энергии электрического поля в конденсаторе.

$$dA_{\text{бат}} = Vdq = V^2dC = Md\Theta + \frac{V^2dC}{2}.$$

Следовательно, $Md\Theta = \dfrac{V^2dC}{2}$, и

$$\frac{dC}{d\Theta} = \frac{d}{d\Theta}\left(\frac{R^2\Theta}{2} + \frac{\epsilon R^2}{2}(\pi - \Theta)\right) = -\frac{(\epsilon-1)R^2}{8\pi d},$$

$$Md\Theta = -\frac{V^2}{2}\frac{(\epsilon-1)}{8\pi d}R^2d\Theta \quad \Rightarrow \quad M = -(\epsilon-1)\frac{V^2R^2}{16\pi d}.$$

Во втором случае постоянен заряд. Запишем работу внешних сил:

$$Md\Theta = d\left(\frac{q^2}{2C}\right) = -\frac{q^2}{2C^2}dC = -\frac{V^2}{2}dC.$$

Момент сил:

$$M = -\frac{V^2}{2}\frac{dC}{d\Theta} = -(\epsilon-1)\frac{V^2R^2}{16\pi d}.$$

Задача 3.70.

Сферический конденсатор с двумя обкладками (внутренней и внешней) разделен на две половины, заполненные диэлектриками с диэлектрической проницаемостью ϵ_1 и ϵ_2 соответственно. Заряд конденсатора: $\pm q$. Определить силу, действующую на внутреннюю сферу радиуса R.

Решение.

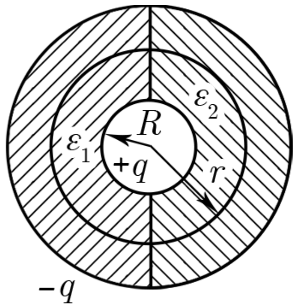

Рис. 5.5

Поле внутри конденсатора будет радиально. Из граничных условий следует, что поля внутри разный областей конденсатора равны друг другу: $E_1 = E_2 = E$.

Заряды будут перераспределены. Суммарный заряд:

$$q = q_1 + q_2.$$

Найдем поле с помощью **теоремы Гаусса**:

$$\oint \vec{D}\, d\vec{S} = \epsilon_1 E_2 \pi r^2 = 4\pi q_1.$$

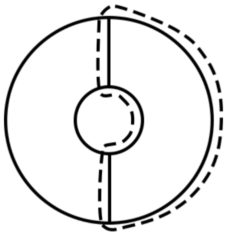

Рис. 5.6

По тем же соображениям

$$\epsilon_2 E_2 \pi r^2 = 4\pi q_2.$$

Значит,

$$q = q_1 + q_2 = \frac{Er^2}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2),$$

$$E(r) = \frac{2q}{r^2(\epsilon_1+\epsilon_2)}, \quad D_1 = \epsilon_1 E = \frac{2q\epsilon_1}{r^2(\epsilon_1+\epsilon_2)}, \quad D_2 = \epsilon_2 E = \frac{2q\epsilon_2}{r^2(\epsilon_1+\epsilon_2)}.$$

Выделим на сферической поверхности кольцо.

Силу F_1 можно получить путем интегрирования плотности энергии W_1 по площади:

$$F_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} W_1\, 2\pi R \sin\Theta\, R\, d\Theta \cos\Theta = W_1\, 2\pi R^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\Theta\, d\sin\Theta = W_1 \pi R^2.$$

Результирующая сила:

$$F = F_1 - F_2 = \pi R^2 (W_1 - W_2) = \pi R^2 \left(\frac{D_1^2}{8\pi\epsilon_1} - \frac{D_2^2}{8\pi\epsilon_2}\right) = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{2(\epsilon_1+\epsilon_2)^2}\frac{q^2}{R^2}.$$

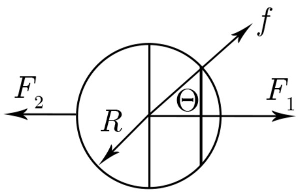

Рис. 5.7

2. Объемные токи

Токи могут течь не только по тонким проводам, но и как-то распределяться по объему (например, если фрагмент проводника представляет из себя шар). Для описания объемных токов необходимо вводить понятие **трубки тока** и **плотности тока** $\vec{j}$ [ток/см^2] помимо общего тока J [А]. Также важно понятие **линейной плотности поверхностного тока** i [ток/см].

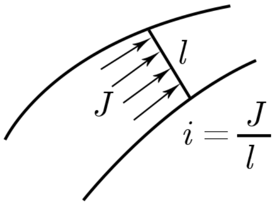

Рис. 5.8

Рассмотрим трубку с площадью поперечного сечения S. По ней движутся носители электричества, которые имеют положительный знак.

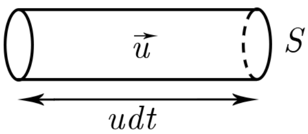

Рис. 5.9

u — средняя скорость перемещения в пространстве носителей электричества. Через поперечное сечение проводника за время dt протекает заряд:

$$dq = n\,e\,u\,dt\,S.$$

Тогда

$$J = \frac{dq}{dt} = n\,e\,u\,S = j\,S, \quad j = \frac{J}{S}.$$

В общем случае плотность тока j является вектором.

Выведем **уравнение неразрывности**. Рассмотрим замкнутый объем V, ограниченный поверхностью S.

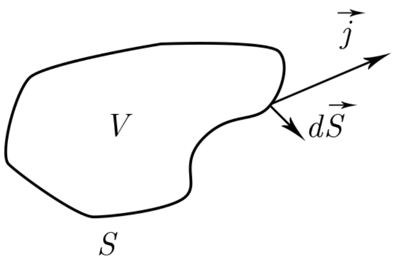

Рис. 5.10

$d\vec{S}$ — внешняя нормаль. Суммарный ток, вытекающий из области:

$$J = \oint\limits_S \vec{j}\, d\vec{S} = -\frac{dq}{dt}.$$

По теореме Гаусса:

$$\int\limits_V \operatorname{div} \vec{j}\, dV = -\frac{d}{dt} \int\limits_V \rho\, dV \quad \Rightarrow \quad \boxed{\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{d\rho}{dt}.}$$

Закон Ома в дифференциальной форме:

$$j = \lambda E.$$

Следовательно,

$$\operatorname{div} \lambda \frac{\vec{D}}{\epsilon} = -\frac{d\rho}{dt} = 0 \text{ (для стационарных токов)}.$$

Отсюда должно следовать, что $\vec{D} = 0$.
Если λ и ϵ постоянны, то их можно вынести за знак дивергенции:

$$\frac{\lambda}{\epsilon} \operatorname{div} \vec{D} = 0.$$

По теореме Гаусса:

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho.$$

Отсюда следует, что $\rho = 0$. То есть объемная плотность заряда по проводнику, по которому течет постоянный ток, равна нулю (он не накапливается). Если λ и ϵ зависят от координат, то это не будет справедливо.

Рассмотрим проводник, состоящий из двух частей, обладающих разным значением проводимости. Для того чтобы удовлетворить граничным условиям, на границе раздела двух разнородных проводников обязательно существуют поверхностные свободные заряды.

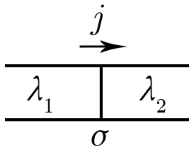

Рис. 5.11

В случае проводника, проводимость которого зависит от координаты x, $\rho \neq 0$ (по теореме Гаусса).

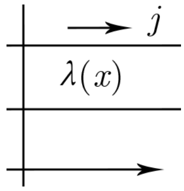

Рис. 5.12

Задача 4.25.

В плоский конденсатор, подключенный к источнику и находящийся под напряжением V, вставлены два разных плоских диэлектрика с диэлектрической проницаемостью, проводимостью и толщиной ϵ_1, λ_1, d_1 и ϵ_2, λ_2, d_2 соответственно. Конденсатор подключен к батарее, обеспечивающей течение тока. Найти поверхностную плотность свободных зарядов на границе раздела диэлектриков.

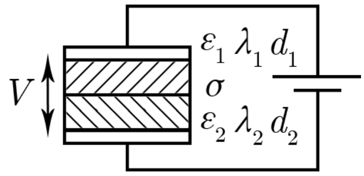

Рис. 5.13

Решение.

$$D_2 - D_1 = 4\pi\sigma \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{\epsilon_2 E_2 - \epsilon_1 E_1}{4\pi} = \frac{\frac{\epsilon_2}{\lambda_2} - \frac{\epsilon_1}{\lambda_1}}{4\pi} j = \frac{\epsilon_2\lambda_1 - \epsilon_1\lambda_2}{4\pi\lambda_1\lambda_2} j.$$

Выражение для тока:

$$J = \frac{V}{R}.$$

$$R = \frac{d_1}{\lambda_1 S} + \frac{d_2}{\lambda_2 S} = \frac{1}{S}\frac{\lambda_2 d_1 + \lambda_1 d_2}{\lambda_1\lambda_2}.$$

Тогда

$$j = \frac{J}{S} = \frac{V}{RS} \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{V}{S}\frac{S\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2 d_1 + \lambda_1 d_2}\frac{\epsilon_2\lambda_1 - \epsilon_1\lambda_2}{4\pi\lambda_1\lambda_2} j = \frac{V}{4\pi}\frac{\epsilon_2\lambda_1 - \epsilon_1\lambda_2}{\lambda_2 d_1 + \lambda_1 d_2}.$$

Задача 4.32.

Заземление концов телеграфной линии осуществляется посредством металлических шаров, врытых глубоко в мокрый грунт. Удельная проводимость почвы возле первого и второго шаров — λ_1 и λ_2 соответственно. Найти сопротивление между шарами.

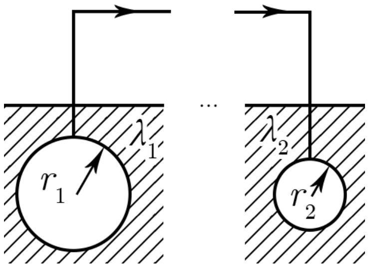

Рис. 5.14

Решение.

Изобразим конфигурацию токов, вытекающих из шара:

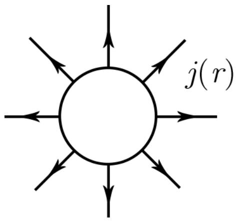

Рис. 5.15

$$I = \text{const} = 4\pi r^2 j(r) \quad \Rightarrow \quad j(r) = \frac{I}{4\pi r^2}.$$

Поскольку $j = \lambda E$, то $E(r) = \dfrac{I}{4\pi\lambda r^2}$. Разность потенциалов между шарами:

$$U = \int\limits_{r_1}^{\infty} \frac{I}{4\pi\lambda_1}\frac{dr}{r^2} - \int\limits_{\infty}^{r_2} \frac{I}{4\pi\lambda_2}\frac{dr}{r^2} = IR.$$

$$R = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\lambda_1 r_1} + \frac{1}{\lambda_2 r_2}\right).$$