ЛЕКЦИЯ 6

МАГНЕТИЗМ

1. Магнитное поле

Магнитных зарядов не существует, поэтому определить магнитное поле аналогично электрическому, через закон Кулона, не получится. Определение из учебника Сивухина: заряд q, движущийся со скоростью $\vec{v}$ (рис. 6.1), создает в некоторой точке A (ее радиус-вектор $\vec{r}$) магнитное поле с индукцией $\vec{B}$.

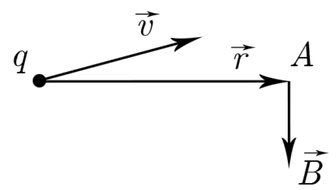

Рис. 6.1: Магнитное поле движущегося заряда.

Вектор магнитной индукции перпендикулярен плоскости, построенной на векторах $\vec{v}$ и $\vec{r}$, и равен

$$\vec{B} = \frac{q}{cr^3}\,[\vec{v}\,\vec{r}\,].$$

Но $\vec{E} = (q/r^3)\vec{r}$ — это электрическое поле, создаваемое данным зарядом, поэтому

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\,[\vec{v}\,\vec{E}\,].$$

В системе СГСЭ, как видно из этого выражения, поля B и E имеют одинаковую размерность. Размерный параметр c — **электродинамическая постоянная** — равен, как показали измерения, скорости света в вакууме.

Перейдем к системе зарядов, движущихся в одну сторону: рассмотрим элемент проволоки длиной $d\vec{l}$, по которому течет ток I. Величина $Id\vec{l}$ носит название **элемента тока**. В пространстве (для объемных токов)

$$Id\vec{l} = \vec{j}dV.$$

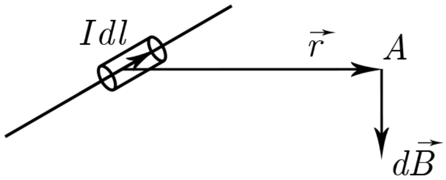

Рис. 6.2: Магнитное поле элемента тока.

Теорема Био – Савара – Лапласа: вклад элемента тока $Id\vec{l}$ в магнитное поле в точке A равен

$$d\vec{B} = \frac{I}{c}[d\vec{l}\,\vec{r}\,].$$

Пример: поле бесконечно протяженного прямого провода на расстоянии r от него равно

$$B = \frac{2I}{cr}.$$

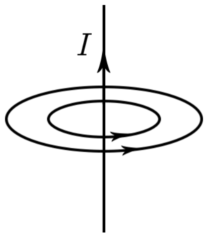

Рис. 6.3: Поле бесконечного прямого провода с током.

Силовые линии этого поля — концентрические окружности (рис. 6.3). Линии магнитного поля *всегда замкнуты*, поскольку источников магнитного поля не существует (так называемые монополи экспериментально не обнаружены).

Для объемного элемента тока

$$d\vec{B} = \frac{dV}{c}[\vec{j}\,\vec{r}\,].$$

Пример 2: виток с током I радиусом R. Поле в центре витка (рис. 6.4)

$$B = \frac{2\pi I}{cR}.$$

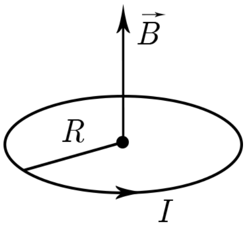

Рис. 6.4: Поле в центре витка с током.

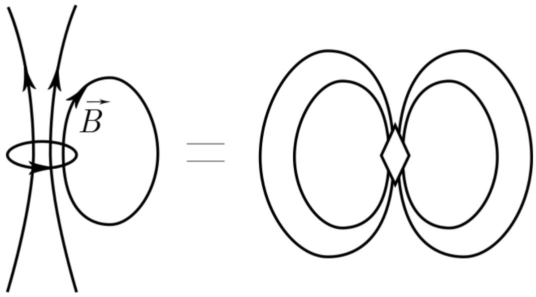

Рис. 6.5: Поле витка с током (слева) и эквивалентное ему поле магнитной стрелки (справа).

Интересно узнать, как выглядит поле такого витка во всем пространстве. Конфигурация силовых линий представлена на рис. 6.5. Она напоминает *поле электрического диполя*.

Существует **теорема соответствия**, доказывающая, что поле, создаваемое малой магнитной стрелкой (т. е. постоянным магнитом), такое же, как поле витка с током. Говорят, что магнитная стрелка обладает **магнитным моментом**. Следовательно, виток с током также обладает магнитным моментом.

Магнитный момент витка с током, по определению,

$$Mathfrak\vec{M} = \frac{1}{c} I\vec{S},$$

причем вектор $\vec{S}$ ориентирован по правилу буравчика относительно тока.

Поле магнитного диполя

$$\vec{B} = \frac{3[Mathfrak\vec{M}\,\vec{r}\,]}{r^5} - \frac{Mathfrak\vec{M}}{r^3}\,.$$

Оно полностью идентично полю электрического диполя. Строгое доказательство этого требует применение более серьезного математического аппарата и выходит за рамки общей физики.

Магнитный дипольный момент — одна из важнейших величин в физике, поскольку им обладают атомы, молекулы и их составные части (орбитальный и собственный момент электрона и др.).

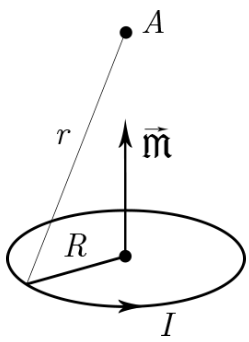

Рис. 6.6: Поле на оси диполя.

С помощью теоремы Био – Савара – Лапласа можно найти поле на оси диполя (рис. 6.6):

$$B_A = \frac{2\pi R^2 I}{cr^3} = \frac{2MathfrakM}{r^3}\,.$$

Воспользовавшись формулой для поля диполя, можно получить тот же результат.

Рассмотрим теперь поле, заполняющее объем между полюсами магнита (рис. 6.7). На заряд, пролетающий в этом промежутке, действует **сила Лоренца**:

$$\vec{F}_{\text{Л}} = \frac{q}{c}[\vec{v}\,\vec{B}\,].$$

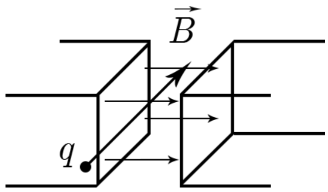

Рис. 6.7: К понятию силы Лоренца.

Если же между полюсами магнита помещен провод с током, на него действует **сила Ампера**:

$$d\vec{F}_{\text{А}} = \frac{I}{c}[d\vec{l}\,\vec{B}\,].$$

Если проинтегрировать это выражение по длине провода (в однородном поле), получим школьную формулу $F_{\text{А}} = (I/c)lB\sin\alpha$.

Использовать теорему Био – Савара – Лапласа для расчета магнитных полей не всегда удобно. Рассмотрим прием, описанный в учебнике Сивухина (параграф 51, пункт 4).

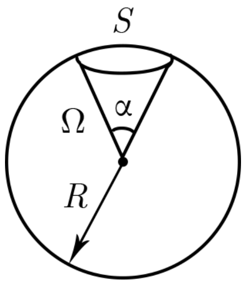

Рис. 6.8: К определению телесного угла.

В электростатике встречается понятие **телесного угла** (рис. 6.8). Выпустим из центра сферы радиусом R конус с углом при вершине α. Он вырежет на поверхности сферы **сферический сегмент**. **Телесный угол** Ω — это пространственный угол, равный

$$\Omega = \frac{S}{R^2} = 2\pi(1-\cos\alpha).$$

Чтобы работать с **поверхностными токами**, то есть токами, текущими по поверхности (например, по ленте), вводят величину **линейная плотность тока**:

$$i = \frac{I}{l},$$

где ток I перпендикулярен ширине ленты l. Величина i векторная.

Пусть по малому элементу поверхности площади S течет ток $\vec{i}$. Заданы ее единичные векторы: вектор нормали $\vec{n}$ и тангенциальный $\vec{\tau}$. Требуется найти вклад данной площадки в поле в некоторой точке A. В учебнике доказано, что тангенциальная составляющая искомого поля

$$dB_\tau = \frac{i}{c}\,d\Omega,$$

где $d\Omega$ — телесный угол, под которым из точки A видна поверхность S (рис. 6.9).

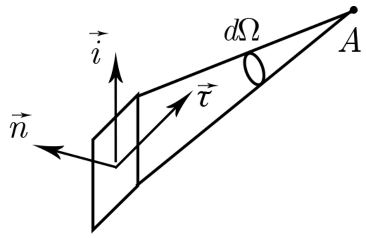

Рис. 6.9: Поле элемента поверхности с током.

Пример: найдем поле внутри соленоида.

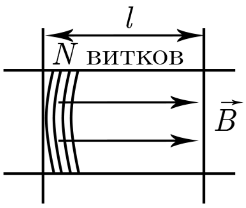

Рис. 6.10: Поле соленоида.

Соленоид — это бесконечно протяженная трубка, по которой циркулирует ток с линейной плотностью i. Реальный пример — молекулярные токи в веществе, которые будут обсуждаться в разделе «магнитное поле в веществе». Приближенно соленоидом можно считать бесконечно протяженную катушку с плотной однослойной намоткой. Пусть на длине l укладывается N витков.

Поле внутри катушки однородно и направлено тангенциально к поверхности с током. Оно равно

$$B = \frac{i}{c}\cdot 4\pi.$$

Линейная плотность тока соленоида

$$i = \frac{IN}{l} = In,$$

где $n = N/l$ называется **плотностью намотки**. Таким образом, поле катушки

$$B = \frac{4\pi}{c} \cdot \frac{IN}{l}\,.$$

Пример 2: найти поле вокруг бесконечно протяженной плоскости, по которой течет ток. Линейная плотность тока равна $\vec{i}$.

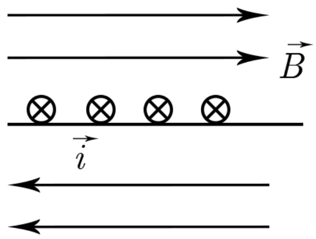

Рис. 6.11: Поле плоскости с током.

В соответствии с правилом буравчика, поле направлено вдоль плоскости перпендикулярно $\vec{i}$ (рис. 6.11). Оно равно

$$B = \frac{2\pi}{c}\,i,$$

поскольку из каждой точки плоскость видна под углом 2π.

Теперь рассмотрим две параллельные поверхности, плотности тока на которых равны по модулю и противоположны по направлению. Снаружи поле плоскостей будет равно нулю, а между плоскостями — удвоенному полю одной плоскости. Получился некий аналог конденсатора. Его можно реализовать, согнув пополам проводящую ленту и пустив по ней ток.

Вспомним также, что два параллельных провода с токами притягиваются, если токи в них сонаправлены, и отталкиваются, если токи направлены противоположно. Поэтому соленоид, внутри которого есть магнитное поле, будет стремиться расшириться, а согнутая пополам пластинка с током — выпрямиться.

Теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$. Есть замкнутый контур L с заданным направлением обхода. На него натянута произвольная поверхность S (рис. 6.12). Теорема гласит, что

$$\oint\limits_L (\vec{B}\,d\vec{l}) = \frac{4\pi}{c}\sum I_i\,,$$

где сумма берется по всем токам, пересекающим поверхность S. Если токи распределены в пространстве,

$$\oint\limits_L (\vec{B}\,d\vec{l}) = \frac{4\pi}{c}\int\limits_S (\vec{j}\,d\vec{S}).$$

В **дифференциальной форме**:

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\,\vec{j}.$$

Такой вид имеет теорема в магнитостатике для поля B в вакууме.

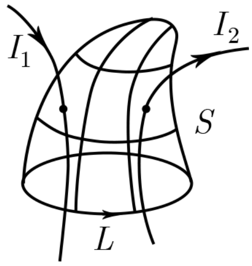

Рис. 6.12: К теореме о циркуляции.

Ротором называется векторная операция

$$\operatorname{rot}\vec{B} = [\nabla\,\vec{B}\,] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Физический смысл ротора:

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \lim_{S\to 0}\frac{\oint\limits_L \vec{B}\,d\vec{l}}{S},$$

причем подразумевается, что контур выбран так, что значение ротора максимально. Итак, ротор есть локальная характеристика соленоидальных полей. **Соленоидальным** называется вихревое поле, силовые линии которого самозамкнуты.

Задача 7.45.

Наэлектризованная полиэтиленовая пленка с поверхностной плотностью заряда $\sigma = 10^{-7}$ Кл/м^2 движется со скоростью $v = 1$ м/с. Над этой лентой висит провод, по которому течет ток в том же направлении, $I = 10$ А. Чему равна погонная плотность силы, действующей на провод?

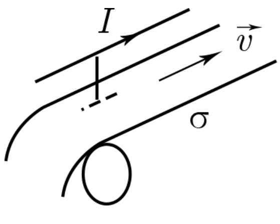

Рис. 6.13: К задаче 7.45.

Решение.

Во-первых, провод притягивается к ленте как к сонаправленному току. Во-вторых, погонная плотность — это величина силы на единицу длины провода f [дин/см].

Для начала переведем плотность заряда в гауссову систему:

$$\sigma = 10^{-7}\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2} = 10^{-7}\frac{3\cdot 10^9}{10^4\,\text{см}^2} = 3\cdot 10^{-2}\,\frac{\text{ед. СГСЭ}}{\text{см}^2}.$$

Провод находится в магнитном поле пленки. Линейная плотность тока пленки

$$i = \sigma v.$$

Индукция ее магнитного поля

$$B = \frac{i}{c}\,2\pi = \frac{2\pi\sigma v}{c}\,.$$

Сила Ампера по модулю

$$F_{\text{А}} = \frac{IlB}{c}\,,$$

тогда искомая погонная плотность

$$f = \frac{IB}{c} = \frac{2\pi\sigma v I}{c^2} = \frac{2\pi \cdot 3 \cdot 10^{-2} \cdot 10^2 \cdot 3 \cdot 10^{10}}{9 \cdot 10^{20}} = 2\pi \cdot 10^{-10}\,\frac{\text{дин}}{\text{см}}\,.$$

Обратим внимание, что c^2 в знаменателе — это признак того, что вычисляется сила или момент в гауссовой системе.

Задача 5.5.

По катушке, имеющей N витков, течет ток I. Нужно посчитать магнитное поле в точке A на оси катушки, из которой торцы катушки видны под углами α и β. Длина катушки l.

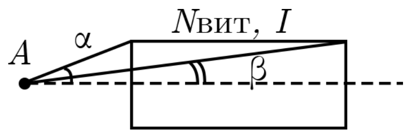

Рис. 6.14: К задаче 5.5.

Решение.

Для решение данной задачи с помощью теоремы Био – Савара – Лапласа потребовалось бы разбивать соленоид на отдельные витки и интегрировать. Зная же выражение для поля через телесный угол, ее можно решить гораздо проще:

$$dB_\tau = \frac{i}{c}\,d\Omega.$$

Но поле в точке A тангенциальное (осевое): $dB_\tau = dB$. Линейная плотность тока

$$i = \frac{IN}{l}\,,$$

а интегрирование по телесному углу даст

$$B_A = \frac{i}{c}\,\Omega.$$

Телесный угол, под которым виден соленоид:

$$\Omega = 2\pi[(1-\cos\alpha) - (1-\cos\beta)],$$

откуда

$$B_A = \frac{IN}{cl}\,2\pi(\cos\beta - \cos\alpha).$$

Задача 5.14.

Внутри протяженного диэлектрического цилиндра по оси натянут провод, на который помещен заряд линейной плотности $\kappa = 1$ ед. СГСЭ. Диэлектрическая проницаемость цилиндра $\epsilon = 3$. Цилиндр вращается вокруг своей оси с угловой скоростью $\Omega = 10^3$ с$^{-1}$. Определить магнитное поле в диэлектрике, в зазоре и снаружи цилиндра.

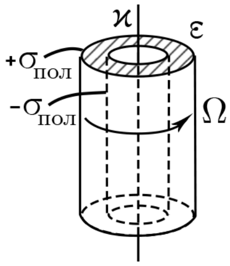

Рис. 6.15: К задаче 5.14.

Решение.

Диэлектрик поляризуется: на внутренней поверхности наведется отрицательный заряд (т. к. $\kappa > 0$), на внешней — положительный:

$$\sigma_{\text{пол}} = P,$$

где $\vec{P}$ — вектор поляризации, то есть дипольный момент единицы объема:

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P},$$

$$P = \frac{1}{4\pi}(D - E),$$

поскольку все векторы коллинеарны. По теореме Гаусса

$$D = \frac{2\kappa}{r}\,.$$

Тогда

$$P = \frac{1}{4\pi}\left(D - \frac{D}{\epsilon}\right) = \frac{D(\epsilon-1)}{4\pi\epsilon} = \frac{\kappa(\epsilon-1)}{r\cdot 2\pi\epsilon} = \sigma_{\text{пол}}\,.$$

Поверхностный ток равен

$$i = \sigma_{\text{пол}}\cdot v = \sigma_{\text{пол}}\cdot \Omega R = \frac{\Omega\kappa(\epsilon-1)}{2\pi\epsilon}$$

и не зависит от радиуса. Получилось два соосных соленоида, токи в которых текут в противоположных направлениях. Значит, их суммарное поле внутри зазора равно нулю. Снаружи поле равно нулю, поскольку соленоиды достаточно длинные. Поле ненулевое только в диэлектрике. Оно создается током положительных поляризационных зарядов и равно

$$B = \frac{4\pi i}{c} = \frac{4\pi}{c}\cdot\frac{\Omega\kappa(\epsilon-1)}{2\pi\epsilon} = \frac{2\Omega\kappa(\epsilon-1)}{c\epsilon}\,.$$

Подстановка чисел дает $B = (4/9) \cdot 10^{-7}$ Гс.

Второй вопрос задачи: что будет, если диэлектрик заменить металлом? В этом случае на поверхностях также наведутся заряды, и магнитное поле будет сосредоточено внутри металла. Его величину можно получить, приняв, что диэлектрическая проницаемость металла $\epsilon = \infty$.

Задача 5.21.

Внутри плазменного цилиндра радиусом a с параболическим распределением удельной проводимости $\lambda = \lambda_0(1 - r^2/a^2)$ течет постоянный ток I. Найти распределение индукции внутри и вне цилиндра $B(r)$.

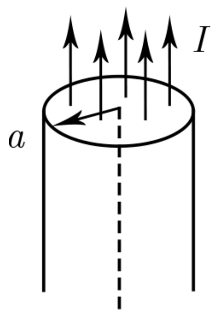

Рис. 6.16: К задаче 5.21.

Решение.

Используя закон Ома в дифференциальной форме, запишем

$$j(r) = \lambda(r)E = \lambda_0 E\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)$$

и введем обозначение $\lambda_0 E = j_0$. Тогда полный ток (рис. 6.17)

$$I = \int\limits_0^a j_0\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) 2\pi r dr = \frac{\pi a^2}{2} j_0.$$

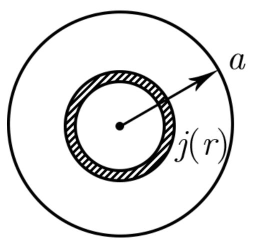

Рис. 6.17: Распределение плотности тока по сечению.

Отсюда находим j_0:

$$j_0 = \frac{2I}{\pi a^2}\,.$$

Теорема о циркуляции B по окружности радиуса r:

$$\oint\limits_{\text{рад } r} (\vec{B}\,d\vec{l}) = B \cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c} \int\limits_0^r j(r)\,2\pi r dr = \frac{4\pi}{c}\,2\pi j_0 \int\limits_0^r \left(r - \frac{r^3}{a^2}\right) dr$$

Окончательно получаем

$$B(r) = \frac{4\pi}{c}\,j_0 \frac{r}{2}\left(1 - \frac{r^2}{2a^2}\right) = \frac{4Ir}{ca^2}\left(1 - \frac{r^2}{2a^2}\right).$$

При $r > a$ поле будет равно полю прямого провода:

$$B = \frac{2I}{cr}\,.$$

Задача 7.38.

По жидкому проводнику, имеющему форму бесконечного цилиндра радиусом a, течет ток I. Найти зависимость $P(r)$ давления из-за взаимодействия тока с полем внутри проводника (**магнитного давления**). Каково давление в центре и на периферии?

Решение.

Параллельные токи притягиваются, поэтому жидкость находится в сжатом состоянии. Выделим объемный элемент тока, используя цилиндрическую симметрию, — бесконечно тонкую цилиндрическую поверхность (рис. 6.18).

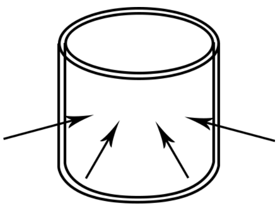

Рис. 6.18: Силы, действующие на объемный элемент тока.

Объемная плотность силы ([дин/см^3]):

$$\vec{f} = \frac{1}{c}\,[\vec{j}\,d\vec{B}\,]$$

По теореме о циркуляции

$$B \cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c}\,\pi r^2,$$

$$B(r) = \frac{2\pi}{c}\,rj.$$

Следует заметить, что поскольку жидкость несжимаема, ток по ней распределен равномерно, $j = I/S$.

Векторы $\vec{j}$ и $\vec{B}$ взаимно перпендикулярны. Поэтому

$$f = \frac{1}{c}\,jB = \frac{2\pi}{c^2}\,rj^2.$$

Сила на выделенный цилиндрический объем перпендикулярна его поверхности и направлена к оси (рис. 6.18).

Давление

$$dp = -f dr = -\frac{2\pi r j^2}{c^2}\, dr,$$

$$P(r) = -\int_a^r \frac{2\pi}{c^2}\, j^2 r dr = \frac{I^2}{c^2 \pi a^2}\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right).$$

При $r = a$ давление $P(a) = 0$, а при $r = 0$ оно максимально.