ЛЕКЦИЯ 8

МАГНЕТИКИ. РАЗМАГНИЧИВАЮЩИЙ ФАКТОР

Рассмотрим пример того, как влияет протяженность цилиндрического металлического проводника на величину магнитного поля внутри него при наличии внешнего магнитного поля. Сначала представим бесконечно протяженный металлический провод с магнитной проницаемостью Mu во внешнем магнитном поле $\vec{B}_0$. Вычислим поле B внутри этого провода.

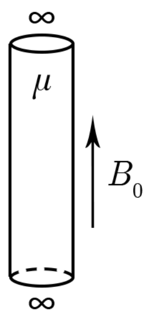

Рис. 8.1

$B_0 = H_0$. Поскольку тангенциальная компонента H не меняется, то

$$H_0 = H = \frac{B}{M}u \quad \Rightarrow \quad B = MuB_0.$$

Но это верно только в случае бесконечно протяженного провода. Рассмотрим тонкий металлический диск, помещенный во внешнее магнитное поле B_0.

Поле B внутри этого диска равно B_0 в силу граничных условий:

$$B_{1\mathrm{n}} = B_{2\mathrm{n}}.$$

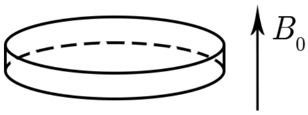

Рис. 8.2

Таким образом, при укорачивании длинного провода до размера диска стало видно, что степень намагниченности провода зависит от его длины. Разумеется, также прослеживается зависимость намагниченности от формы проводника. Для более подробной информации по этому вопросу читателю рекомендуется обратиться к третьему тому курса «Общая физика» Д. В. Сивухина.

Также хорошей иллюстрацией зависимости упомянутого рода служит **опыт**, в котором внутрь катушки-электромагнита помещается пучок из стержней, связанных веревкой (рис. 8.3). Часто при демонстрации опыта величина магнитного поля подбирается такой, что пучок стержней слегка приподнимается над столом, но не втягивается в электромагнит (пучок выступает как единое целое). Затем нить пережигают, и тогда все стержни быстро поднимаются внутрь магнита — каждый стержень становится относительно длинным цилиндром.

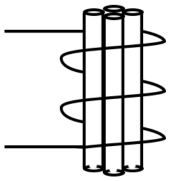

Рис. 8.3

Зависимость того, каким будет поле внутри материала, и называется **размагничивающим фактором**.

Задача 6.7.
Стержень с магнитной проницаемостью $Mu \gg 1$ помещен внутрь однородного магнитного поля B_0, направленное параллельно его оси. Если бы этот цилиндр был более длинным, то внутри него было бы поле MuB_0. Оценить, при какой минимальной длине цилиндра индукция внутри отличается от этого значения не более чем на один процент $\left(\dfrac{MuB_0 - B}{MuB_0} \leqslant 10^{-2}\right)$.

Решение.
Поскольку

$$B = H + 4\pi I = MuH,$$

то

$$4\pi I = (Mu - 1)H = \frac{Mu - 1}{Mu}B.$$

На прошлом семинаре была рассмотрена задача о магнитном стержне с постоянной намагниченностью. Была найдена величина поля внутри этого «соленоида». Произведем

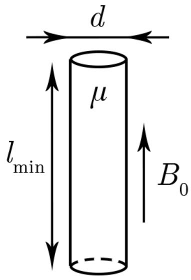

Рис. 8.4

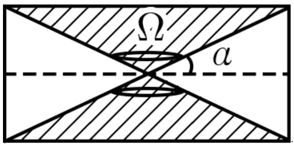

Рис. 8.5

еще раз основные выкладки: рассмотрим телесный угол, под которым из центра видна вся внутренняя поверхность этого цилиндра. Найдем поле внутри такого стержня с постоянной намагниченностью I.

$$\Omega = 4\pi - 2\Omega_{\text{торц}}, \qquad \Omega_{\text{торц}} = 2\pi(1-\cos\alpha).$$

$$\Omega = 4\pi\cos\alpha, \qquad \cos\alpha = \frac{l/2}{\sqrt{r^2 + l^2/4}} \approx 1 - \frac{2r^2}{l^2}.$$

Выражение для поля B через линейную плотность тока i:

$$B = \frac{i}{c}\Omega = \frac{4\pi i}{c}\cos\alpha \approx 4\pi I\left(1 - \frac{2r^2}{l^2}\right), \text{ т. к. } \frac{i}{c} = I.$$

Для цилиндра, рассматриваемого в данной задаче:

$$B = B_0 + 4\pi I\left(1 - \frac{d^2}{2l^2}\right) = B_0 + \frac{Mu-1}{Mu}B\left(1 - \frac{d^2}{2l^2}\right).$$

Следовательно,

$$B = \frac{B_0}{1 - \frac{Mu-1}{Mu}\left(1 - \frac{d^2}{2l^2}\right)}.$$

$$\frac{MuB_0 - B}{MuB_0} = 1 - \frac{B}{MuB_0} = 1 - \frac{1}{1 + (Mu-1)\frac{2r^2}{l^2}} \approx (Mu-1)\frac{2r^2}{l^2} \leqslant 10^{-2}.$$

Так как $Mu \gg 1$, $r \ll l$, то

$$\frac{r^2}{l^2} \leqslant \frac{0{,}01}{2(Mu-1)} \quad \Rightarrow \quad l^2 \geqslant \frac{2r^2(Mu-1)}{0{,}01}, \quad l \geqslant r\cdot 14{,}1\sqrt{Mu-1}.$$

Задача 6.21.

Требуется построить электромагнит, который создает в зазоре поле $B = 10^4$ Гс. Длина сердечника $l = 140$ см, ширина зазора $a = 1$ см, диаметр сердечника $d = 6$ см. Намотка на электромагните представляет из себя проволоку диаметром поперечного сечения $S = 1$ мм. Какое напряжение V нужно подать на оболочку для получения такого поля в зазоре при максимальной токе $J_{\max} = 3$ А? Магнитная проницаемость железа $Mu = 10^3$, плотность медных проводов $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом/м.

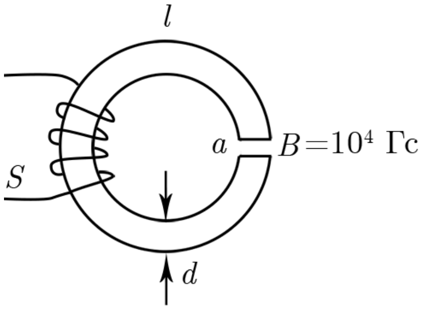

Рис. 8.6

Решение.

Теорема о циркуляции:

$$\oint \vec{H}\,d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} N J_{\max},$$

где N — число витков.

$$\oint \vec{H}\,d\vec{l} = \frac{B}{M} ul + Ba = \frac{4\pi}{c} N J_{\max}.$$

В соответствии с граничными условиями поле B не должно претерпевать скачки. Каким бы тонким ни был зазор, он начинает рассеивать магнитный поток.

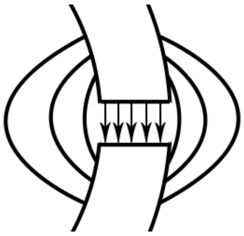

Рис. 8.7

Поле становится более круглым на краях; оно становится похожим на поле диполя. В рамках данной задачи не будем учитывать рассеяние магнитного поля.

$$N = \frac{cB(l + Mua)}{4\pi M u J_{\max}} \approx 3020.$$

$$V = J_{\max} R = J_{\max} \frac{\rho \pi d N}{S} = 29{,}8 \text{ В}.$$

Задача 6.17.

На железный сердечник постоянного сечения длиной 1 м с зазором 1 мм намотана катушка с числом витков $N = 1600$, по которой течет ток $J = 1$ А.

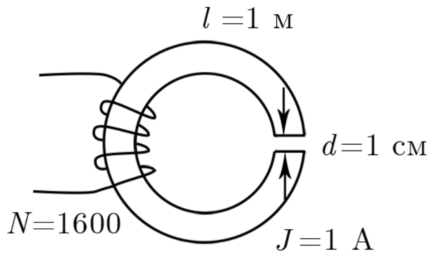

Рис. 8.8

Задана зависимость поля B от H внутри железа:

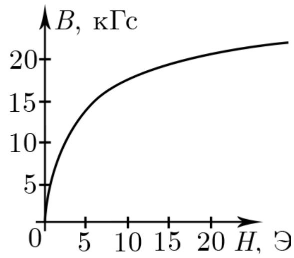

Рис. 8.9

Найти поле $B_{\text{заз}}$ в зазоре.
Решение.
По теореме о циркуляции

$$\oint \vec{H}\, d\vec{l} = Bd + Hl = \frac{4\pi}{c} NJ = \frac{4\pi \cdot 1600 \cdot 3 \cdot 10^9}{3 \cdot 10^{10}} = 640\pi = 2010 \text{ Гс} \cdot \text{см},$$

$$B = \frac{2010 - Hl}{d} = 20 \cdot 10^3 - H \cdot 10^3.$$

Величину поля $B_{\text{заз}}$ нетрудно найти графическим способом:

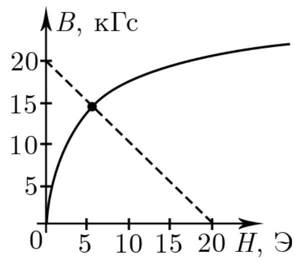

Рис. 8.10

Примерное значение: $B_{\text{заз}} \approx 15$ кГс.

Задача 8.61.

По двум горизонтальным параллельным проводам, находящихся на расстоянии $2a = 1$ см, текут одинаковые по величине, но противоположные по направлению тока силой $J = 10^3$ А. Точно посередине между проводами находится диамагнитный шарик, магнитная восприимчивость которого $\kappa = -10^{-5}$, а плотность $\rho = 2$ г/см^3.

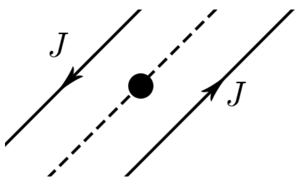

Рис. 8.11

Найти период колебаний T этого шарика внутри этой системы. Считать, что вертикальное движение шарика отсутствует. Трением пренебречь.

Решение.
Эти два поля складываются, и шарик намагничивается против поля.

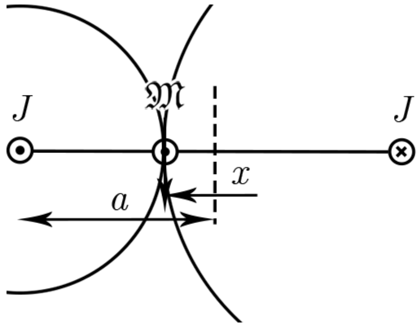

Рис. 8.12

Магнитный момент M, который он приобрел, направлен вниз. Возникающая при этом сила F носит возвращающий характер.

Обозначим за x малое отклонение шарика от положения равновесия. Тогда

$$B = \frac{2J}{c}\left(\frac{1}{a-x} + \frac{1}{a+x}\right) = \frac{4Ja}{c(a^2-x^2)} \approx \frac{4Ja}{ca^2}.$$

Поле однородно, значит, $F = M\dfrac{dB}{dx}$.

$$\frac{dB}{dx} = \frac{8Ja}{c(a^2-x^2)^2}x \approx \frac{8Ja}{ca^4}x = \frac{8Jx}{ca^3}.$$

Отдельно рассмотрим, что произошло бы с шариком в поле B_0.

$$I = \frac{3}{4\pi}\frac{Mu-1}{Mu+2}B_0 = \Big|_{Mu=1+4\pi\kappa} = \frac{3\kappa}{3+4\pi\kappa}B_0 = \frac{\kappa}{1+\frac{4\pi}{3}\kappa}B_0 \approx \kappa B_0,$$

т. к. в данной задаче $|\kappa| \ll 1$.

Магнитный момент, который приобрел шарик в поле:

$$M = IV = I\frac{m}{\rho} = \kappa H\frac{m}{\rho} \approx \kappa B\frac{m}{\rho}.$$

$$F = \kappa B\frac{m}{\rho}\frac{dB}{dx} = \kappa\frac{m}{\rho}\frac{4Ja}{ca}\frac{8J}{ca^3}x = \kappa\frac{m}{\rho}\frac{32J^2}{c^2a^4}x = m\ddot{x}.$$

Уравнение колебаний:

$$\ddot{x} + \frac{|\kappa|}{\rho}\frac{32J^2}{c^2a^4}x = 0$$

Период колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi ca^2}{2J}\sqrt{\frac{\rho}{2|\kappa|}} \sim 1\text{ с}.$$

Задача 6.9.

Центр сферы, имеющую радиус R, лежит на поверхности магнетика. Поле B_0 вне этого магнетика направлено под углом Θ к нормали.

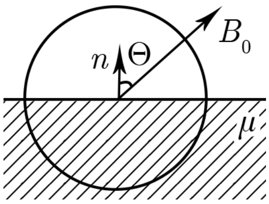

Рис. 8.13

Считая внутри и вне магнетика поле однородным, найти:

1. Поток вектора $\vec{H}$ ($\oint\limits_S \vec{H}\,d\vec{S}$) через эту сферу.

2. Циркуляцию вектора $\vec{B}$ по прямоугольному контуру со сторонами L_1, L_2. Плоскость прямоугольника лежит в плоскости рисунка.

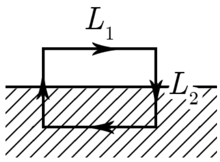

Рис. 8.14

Решение.

Напомним, что $\oint\limits_S \vec{B}\,d\vec{S} = 0$ (в силу того, что магнитных зарядов не существует).

Сначала решим вопрос из второго пункта. Поскольку $Mu_{\text{вакуум}} = 1$,

$$B_0 = H_0 = B_0 \cos\Theta.$$

Поскольку нет поверхностных токов, то

$$B_{0\tau} = H_{0\tau} = H_\tau = B_0 \sin\Theta.$$

В материале

$$B_\tau = H_\tau = MuB_0 \sin\Theta.$$

$$\oint\limits_L \vec{B}\,d\vec{l} = B_0 \sin\Theta L_1 - MuB_0 \sin\Theta L_1 = (1 - Mu)B_0 \sin\Theta L_1.$$

Нормальные компоненты циркуляции компенсируют друг друга.

Теперь ответим на вопрос из первого пункта. В силу граничных условий можно исключить из рассмотрения тангенциальную составляющую поля H (но не поля B).

Рассмотрим цилиндр с радиусом R.

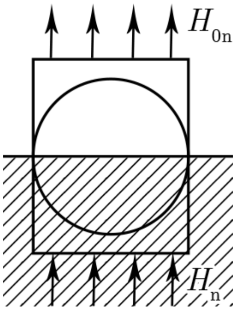

Рис. 8.15

Нужно посчитать поток через площадь сечения, вырезаемой на поверхности этим шаром.

$$\oint\limits_S \vec{H}\, d\vec{S} = (H_{0n} - H_n)\pi R^2 = (B_0 \cos\Theta - \frac{B_0}{Mu}\cos\Theta)\pi R^2 = \frac{Mu-1}{Mu} B_0 \cos\Theta \pi R^2.$$

Задача 8.75.

Две одинаковых железных иголки сечения $S = 1$ мм^2 и длиной $l = 1$ см имеют остаточную магнитную индукцию $B_1 = 12560$ Гс. Одна игла неподвижно закреплена в плоскости, перпендикулярной магнитному полю Земли. Другая может свободно вращаться в этой плоскости, проходящей через центр. Определить период колебаний подвижной иголки, если известна плотность железа: $\rho = 8$ г/см^3.

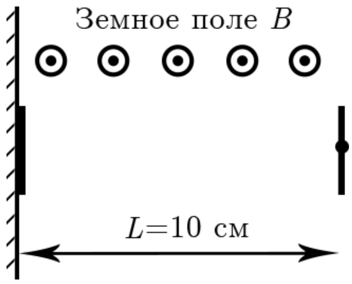

Рис. 8.16

Решение.

Поле не может повлиять на период колебаний (пока расположено перпендикулярно).

Естественное положение второй иглы — по полю. Можно рассматривать иголку как диполь (рис. 8.17). Поле диполя в перпендикулярном направлении:

$$\vec{B} = -\frac{\vec{M}}{L^3}.$$

Энергия взаимодействия:

$$W = -(\vec{M}, \vec{B}) = \frac{(\vec{M}_1, \vec{M}_2)}{L^3}.$$

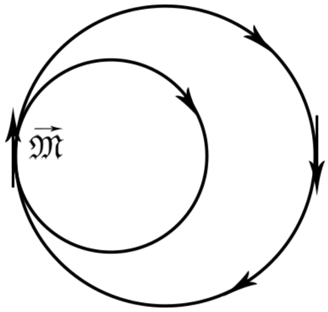

Рис. 8.17

Сила, действующая на магнитный момент:

$$F = -\frac{\partial W}{\partial M} = \frac{3(\vec{M}_1, \vec{M}_2)}{L^4}.$$

Если $\vec{M}_1$ и $\vec{M}_2$ сонаправлены, то $F > 0$. Если разнонаправлены, то $F < 0$.
Момент силы:

$$\vec{M} = [\vec{M}, \vec{B}], M = MB \sin\alpha \approx MB\alpha.$$

Момент инерции:

$$J = \frac{ml^2}{12} = \frac{\rho l^3 S}{12}.$$

Уравнение колебаний:

$$J\ddot{\alpha} = M = -M_2 B_1 \alpha.$$

$$M_2 = I_2 V;$$

$$B_{\text{ост}} = H + 4\pi I = 4\pi I, \quad \Rightarrow \quad I = \frac{B_{\text{ост}}}{4\pi}.$$

$$M_2 = \frac{B_{\text{ост}}}{4\pi} lS,$$

$$\frac{\rho l^3 S}{12}\ddot{\alpha} + \frac{B_{\text{ост}} lS}{4\pi}\frac{M}{L^3}\alpha = 0.$$

$$\omega^2 = \frac{3B_1^2 S}{4\pi L^3 \rho l}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{4\pi^2 L}{B_1}\sqrt{\frac{\rho l L}{3S}} \approx 1{,}6 \text{ с}.$$