ЛЕКЦИЯ 9

ИНДУКТИВНОСТЬ. ЗАКОНЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ

Пример.

Дан коаксиальный кабель, по которому течёт ток J. Заданы радиусы оплётки и внутренней «жилы», равные R и r соответственно. Найти индуктивность единицы длины кабеля.

Решение.

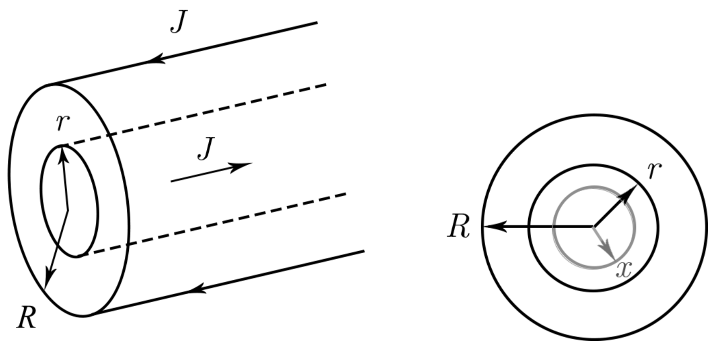

Рис. 9.1

Плотность тока, текущего по внутреннему проводу, равна:

$$j = \frac{J}{\pi r^2}.$$

Тогда ток равен

$$J(x) = j\pi x^2 = J\frac{x^2}{r^2}.$$

По теореме о циркуляции:

$$\oint Bdl = B \cdot 2\pi x = \frac{4\pi}{c} \cdot J(x) = \frac{4\pi}{c} J\frac{x^2}{r^2},$$

при $x \leqslant r$ $B(x) = \frac{2J}{cr^2}x$,
при $x > r$ $B = \frac{2J}{cx}$.

1. Поток внутри «жилы»:
$$d\Phi_1 = B(x)l\,dx,$$
$$\Phi_1 = \int\limits_0^r B(x)l\,dx = \frac{2J}{cr^2}\int\limits_0^r xl\,dx = \frac{Jl}{c};$$

2. Поток между проводниками
$$R > x > r,$$
$$\Phi_2 = \int\limits_0^r B(x)l\,dx = \frac{2Jl}{c}\int\limits_0^r \frac{dx}{x} = \frac{2Jl}{c}\ln\frac{R}{r},$$
$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{Jl}{c} + \frac{2Jl}{c}\ln\frac{R}{r} = 1 + 2\ln\frac{R}{r}\frac{J}{c}l.$$

Откуда следует:
$$L = l\left(1 + 2\ln\frac{R}{r}\right),$$
$$L^{ед} = 1 + 2\ln\frac{R}{r}.$$

Задача 5.29.

Один и тот же ток течёт по двум длинным параллельным проводам в противоположные стороны. Провода имеют круглые сечения радиусом $r = 2$ мм, а расстояние между ними $d = 2$ см. Найти индуктивность $L_{\text{ед}}$ единицы длины этой системы, учитывая магнитное поле только вне проводов.

Решение.

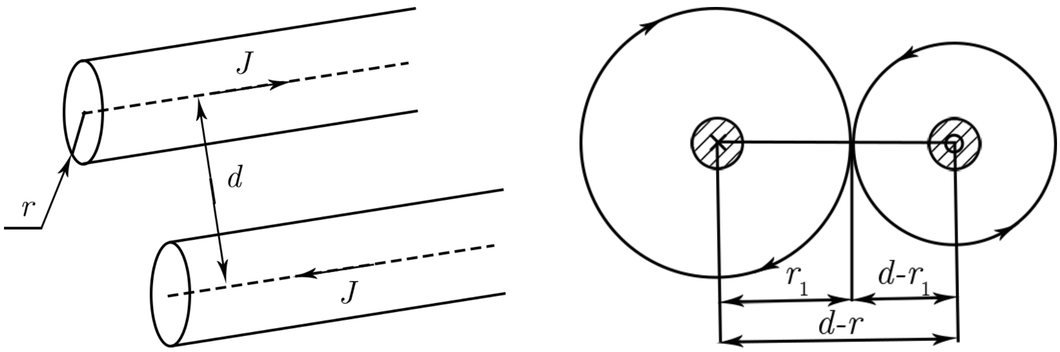

Рис. 9.2

Пусть $B_1 = \frac{2J}{cr_1}$ —магнитное поле одного из проводов в точке, на расстоянии r_1. $B_2 = \frac{2J}{c(d-r_1)}$ —поле второго провода в той же точке. Тогда полное поле равно:
$$B = B_1 + B_2 = \frac{2J}{c}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{(d-r_1)}\right).$$

Возьмём площадку между проводами $dS = ldr_1$, которую пронизывает магнитное поле.

$$d\Phi = BdS = Bldr_1.$$

$$\Phi = \frac{2Jl}{c}\left[\int\limits_r^{d-r}\frac{dr_1}{r_1} + \int\limits_r^{d-r}\frac{dr_1}{d-r_1}\right] = \frac{2Jl}{c}\left[\ln\frac{d-r}{r} - \ln\frac{d-d+r}{d-r}\right] = \frac{4Jl}{c}\ln\frac{d-r}{r},$$

$$L = 4l\cdot\ln\frac{d-r}{r} = 4l\cdot\ln 9 \approx 8{,}8\,l\ [\text{см}],$$

$$L^{ед} = 4\ln\frac{d-r}{r} = 8{,}8.$$

Задача 5.30.

На один сердечник намотаны две катушки. Индуктивности катушек в отдельности соответственно равны $L_1 = 0{,}5$ Г и $L_2 = 0{,}7$ Г. Чему равна взаимная индуктивность M? Рассеяния магнитного поля нет.

Решение.

Потоки, пронизывающие первую и вторую катушку, равны

$$\Phi_1 = \frac{1}{c}\left[L_{11}J_1 + L_{12}J_2\right],$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{c}\left[L_{21}J_1 + L_{22}J_2\right].$$

L_{12} и L_{21} называются **коэффициентами взаимной индукции**. Так как ток один, а $L_{21} = L_{12} = M$, то можно записать

$$\Phi = \frac{1}{c}LJ = \frac{1}{c}\left(L_1J + 2MJ + L_2J\right).$$

Откуда находим:

$$L = L_1 + 2M + L_2.$$

Учитывая, что $L \propto N^2$,

$$(N_1 + N_2)^2 = N_1^2 + 2N_1N_2 + N_2^2,$$

$$M = \sqrt{L_1L_2.} = 0{,}59\ \text{Гн}.$$

Задача 7.1.

Медный диск радиусом $a = 10$ см вращается в однородном магнитном поле, делая 100 оборотов в секунду. Индукция магнитного поля направлена перпендикулярно к плоскости диска и равна $B = 10^4$ Гс. Две щётки, одна на оси диска, другая на окружности, соединяют диск с внешней цепью, в которую включены реостат с сопротивлением $R = 10$ Ом и амперметр, сопротивлением которого можно пренебречь. Что показывает амперметр?

Решение.

Поскольку линейная скорость везде разная, то будут различные силы Лоренца. Во время вращения произойдёт распределение зарядов, возникнет напряжённость электрического поля, которое противостоит полю, порождённому магнитным полем.

$$F_{\text{Лор}} = \frac{e}{c}\upsilon(r)B = \frac{e}{c}\omega rB = F_{\text{эл}} = eE(r),$$

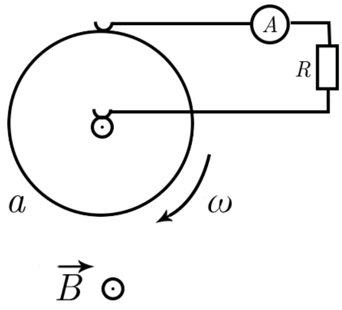

Рис. 9.3

$$E(r) = \frac{\omega r}{c}B,$$

$$\Delta\Phi = \int\limits_0^a E\,dr = \frac{\omega B}{c}\int\limits_0^a r\,dr = \frac{\omega B a^2}{2c},$$

$$J = \frac{\Delta\Phi}{R} = \frac{\omega B a^2}{2cR} = \frac{\pi}{a} = 0{,}314 \text{ А}.$$

Задача 8.30.

В ускорителе электронов бетатроне роль ускоряющего напряжения играет ЭДС индукции, возбуждаемая изменением магнитного потока, пронизывающего орбиту электронов. Электроны движутся при этом по орбитам приблизительно постоянного радиуса. Считая радиус орбиты неизменным, определить необходимое для этого в данный момент времени соотношение между средним магнитным полем $\bar{B}(t)$, пронизывающим орбиту электрона, и магнитным полем на орбите электрона $B(t)$. Магнитное поле параллельно оси симметрии вакуумной камеры бетатрона.

Решение.

$$\oint \vec{E}d\vec{l} = 2\pi R E = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{c}\pi R^2\dot{\bar{B}},$$

Поле, меняющее импульс электрона:

$$E = \frac{R}{2c}\dot{\bar{B}}.$$

$$\frac{dP}{dt} = eE = \frac{eR}{2c}\dot{\bar{B}} = \dot{P}.$$

Радиус орбиты:

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{e}{c}vB_0 \to R = \frac{mvc}{eB_0} = \frac{Pc}{eB_0}.$$

Требование $R = \text{const} \to \dot{R} = 0$

$$\dot{R} = \frac{\dot{P}c}{eB_0} - \frac{Pc}{eB_0^2}\dot{B}_0 = 0$$

$$\to \frac{\dot{P}}{P} = \frac{\dot{B}}{B_0} = \frac{eR\dot{\bar{B}}}{2cP} = \frac{\dot{\bar{B}}}{2B_0} \to \dot{B}_0 = \frac{\dot{\bar{B}}}{2}.$$

При $t = 0$, $\bar{B} = 0$, $B = 0$, следовательно

$$B = 2B_0.$$

Задача 8.35.

Электрон, обладающий скоростью v, попадает в однородные и постоянные взаимно перпендикулярные электрическое и магнитное поля E и B. Скорость v перпендикулярна к обоим полям. Найти траекторию движения электрона.

Решение.

$$m\dot{\vec{v}} = e\left(\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{v}\vec{B}]\right),$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u},$$

где u —дрейфовая скорость.

$$m\dot{\vec{v}}' = e\left(\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{v}'\vec{B}] + \frac{1}{c}[\vec{u}\vec{B}]\right).$$

Пусть $\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{u}\vec{B}] = 0$, тогда $|\vec{u}| = \frac{cE}{B}$, $(u \ll c,\ E \ll B)$.

$$m\dot{\vec{v}}' = \frac{1}{c}[\vec{v}'\vec{B}],$$

$$\to m\omega^2 R = \frac{e}{c}v'B = \frac{eB}{c}\omega R,$$

$$\vec{\omega} = -\frac{e\vec{B}}{mc} \to R = \frac{v'}{\omega} = \frac{mc}{eB}\left|v - \frac{cE}{B}\right|.$$

Траектории:

при $t = 0$; $V_y = 0$; $V_x = V$:

$$\begin{cases} V_y = \left(V - \dfrac{cE}{B}\right)\sin\omega t, \\ V_x = \left(V - \dfrac{cE}{B}\right)\cos\omega t + c\dfrac{E}{B}, \\ V_z = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{cE}{B}t + R\sin\dfrac{eB}{mc}t, \\ y(t) = R\left(1 - \cos\dfrac{eB}{mc}t\right), \\ z = \text{const}. \end{cases}$$

Задача 5.31.

Внутрь тонкого воздушного соленоида вставлена маленькая плоская катушка с числом витков $n = 40$ и площадью витка $S = 10$ см^2, по обмотке которой течёт ток $J = 1$ А. Длина соленоида $l = 50$ см, число витков $N = 10000$. Определить магнитный поток, который посылает поле катушки через обмотку соленоида.

Решение.
По теореме о взаимности $\Phi_{\text{кс}} = \Phi_{\text{ск}}$. Запустим ток J через соленоид.

$$B_c = \frac{4\pi}{c}\frac{N}{c}J,$$

$$\Phi_{\text{ск}} = B_c Sn = \frac{4\pi}{c}\frac{NnS}{l}J = \frac{4\pi \cdot 10^4 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 10^9}{3 \cdot 10^{10} \cdot 50} = \frac{16\pi}{5}10^4 = 10^5 \text{ Мкс} = \Phi_{\text{кс}}.$$