ЛЕКЦИЯ 10

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ СИЛ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ. СВЕРХПРОВОДНИКИ

Задача 7.64.

Электромагнит из железного бруса квадратного сечения в форме подковы имеет размеры в сантиметрах, указанные на рис. 10.1. Число витков обмотки $N = 200$. Сила тока $J = 2$ А. Как велика подъёмная сила F электромагнита, если $Mu = 200$?

Решение.

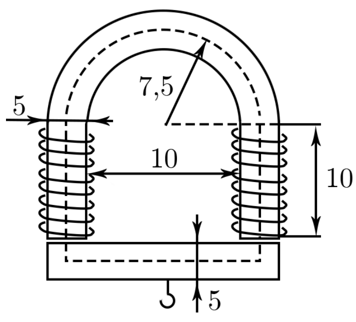

Рис. 10.1

1. 1 способ (с помощью плотности энергии):
   Из теоремы о циркуляции следует:
   $$\int\limits_L H\,dl = \frac{4\pi}{c}NJ = \frac{B}{Mu}l,$$
   где l — контур, проходящий через центр электромагнита и обозначенный штриховой линией на рисунке.
   $$l = \pi \cdot 7{,}5 + 20 + 15 + 5 = 64 \text{ см};$$

$$B = \frac{4\pi}{c}\frac{JNMu}{l} = 1580 \text{ Гс};$$

$$\frac{F}{S} = \omega_2 - \omega_1 = 2\frac{1}{8\pi}\left(\frac{1}{Mu_2} - \frac{1}{Mu_1}\right)B^2 = \frac{2B^2}{8\pi},$$

где Mu_1 — магнитная проницаемость воздуха, Mu_2 — железа. Пренебрегая значением $\frac{1}{Mu_2} = \frac{1}{200}$, находим:

$$F = \frac{4\pi N^2 J^2 Mu^2 S}{c^2 l^2} = 9,9 \cdot 10^6 \text{ дин} = 99,5 \text{ Н}.$$

2. 2 способ (с учётом магнитного поля, возникающего в зазоре):

$$\int\limits_L H\,dl = \frac{B}{Mu}l + B \cdot 2x = \frac{4\pi}{c}NJ,$$

где x — воздушный зазор. Магнитное поле в зазоре и в материале одно и то же.

$$B = \frac{\frac{4\pi}{c}NJ}{\frac{l}{Mu} + 2x};$$

$$W_м = \frac{B^2}{8\pi Mu}Sl + \frac{B^2}{8\pi}S \cdot 2x = \frac{\left(\frac{4\pi}{c}NJ\right)^2 S}{\left(\frac{l}{Mu} + 2x\right)^2 \cdot 8\pi}\left(\frac{l}{Mu} + 2x\right),$$

где первый член есть энергия в железе, а второй — энергия в зазорах.

$$F = \frac{\partial W_м}{\partial x} = \frac{2\left(\frac{4\pi}{c}NJ\right)^2 S}{\left(\frac{l}{Mu} + 2x\right)^2 \cdot 8\pi} =$$

$$= -\frac{4\pi J^2 N^2 S}{c^2\left(\frac{l}{Mu} + 2x\right)^2} \xrightarrow{x \to 0} \frac{4\pi N^2 J^2 Mu^2 S}{c^2 l^2} = 9,9 \cdot 10^6 \text{ дин} = 99,5 \text{ Н}.$$

Задача 7.12.

Внутри тонкого длинного соленоида, ось которого горизонтальна, находится небольшая магнитная стрелка, уравновешенная на острие, вокруг оси которого может свободно вращаться. Вдоль оси соленоида приложено внешнее однородное магнитное поле с индукцией B_0. В начальный момент стрелка горизонтальна, отклонена на малый угол α_0 от направления B_0 и покоится. Затем стрелку отпускают. Определить амплитуду и частоту переменной ЭДС, возникающей на концах обмотки соленоида. Плотность намотки соленоида n [витков/см], момент инерции стрелки относительно оси вращения — J, её магнитный момент — $MathfrakM$.

Решение.

По теореме о взаимности стрелку можно представить как виток током, магнитные

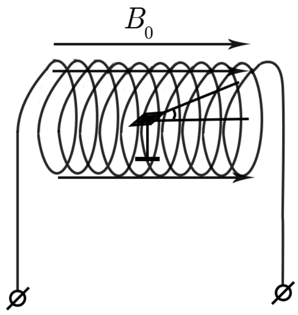

Рис. 10.2

моменты которых совпадают. Если запустить этот ток через соленоид, тогда возникнет поле, и магнитный поток, пронизывающий виток, будет равен этому потоку:

$$\Phi_{\text{стрелка}} = \Phi_{\text{соленоид-стрелка}} = \frac{4\pi}{c} nJS\cos\alpha = 4\pi n MathfrakM \cos\alpha.$$

Учитывая, что $I\ddot{\alpha}$ — возвращающий момент, а ввиду малых колебаний $\sin x \approx x$.

$$I\ddot{\alpha} = -MathfrakMB_0 \sin x \to \ddot{\alpha} + \frac{MathfrakMB_0}{I}\alpha = 0;$$

$$\omega = \sqrt{\frac{MathfrakMB_0}{I}}.$$

Решение этого уравнения:

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cos\omega t,$$

$$MathcalE = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{c}\left[4\pi n MathfrakM \cos\left[\alpha_0\cos\omega t\right]\right] =$$

$$= -\frac{4\pi n MathfrakM}{c}\sin\left(\alpha_0\cos\omega t\right)\alpha_0\left(\sin\omega t\right)\omega = -\frac{2\pi}{c} n MathfrakM \alpha_0^2 \omega \sin 2\omega t.$$

Задача 7.75 (упрощённая).

Во сколько раз изменится ток в круговой петле из сверхпроводника, если поместить её внутри длинного сверхпроводящего соленоида, замкнутого накоротко? Диаметры петли и соленоида считать равными, а оси — параллельными. В отсутствие круговой петли ток в соленоиде равен нулю, начальный ток в петле J_0. Индуктивность петли — L, соленоида — L_C, число витков соленоида — N.

Решение.

В сверхпроводниках магнитный поток сохраняется.

1. Поток через петлю: $LJ_0 = LJ_1 + MJ_C$.

2. Поток через соленоид: $0 = L_C J_C + MJ_1$.

Отсюда находим:

$$J_C = -\frac{MJ_1}{L_C},$$

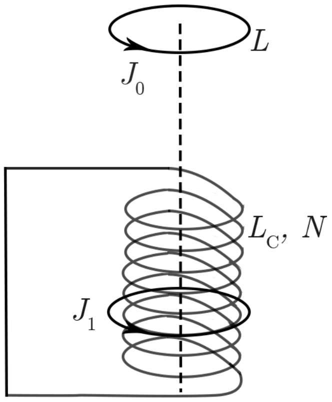

Рис. 10.3

$$LJ_0 = LJ_1 - \frac{M^2 J_1}{L_C}.$$

Следовательно,

$$\frac{J_1}{J_0} = \frac{L}{L - \frac{M^2}{L_c}}.$$

Учитывая, что поток поля соленоида через петлю равен $\frac{1}{c}MJ_C = BS$, а собственный поток соленоида — $\frac{1}{c}L_C J_C = BSN$, и выражая через эти соотношения $M = \frac{L_C}{N}$, находим ответ:

$$\frac{J_1}{J_0} = \frac{L}{L - \frac{L_c}{N^2}}.$$

Задача 6.37.

Найти распределение поверхностных токов i для плоской поверхности сверхпроводника, если на расстоянии $h = 1$ см от неё расположен прямолинейный достаточно длинный параллельный плоскости сверхпроводника тонкий провод, по которому течёт ток $J = 10$ А. Найти также силу f, действующую на единицу длины провода.

Решение.

Взаимодействие провода и сверхпроводящей поверхности эквивалентно взаимодействию двух проводов. В соответствии с **эффектом Мейснера**, который состоит в том, что магнитное поле полностью вытесняется из объёма сверхпроводника, провод должен отталкиваться от поверхности, а следовательно, и два провода будут отталкиваться. Это произойдёт только в случае, если токи текут в противоположные стороны. Поле может быть только тангенциальным. Граничное условие для поля H:

$$H_{2t} - H_{1t} = \frac{4\pi}{c} i,$$

где i — сверхпроводящий ток. Поля проводов равны между собой по модулю:

$$B_{\text{п}1} = B_{\text{п}2} = \frac{2I}{c\sqrt{x^2 + h^2}};$$

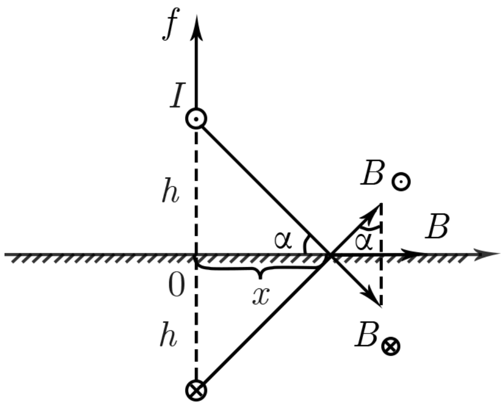

Рис. 10.4

$$B_t = B_{\text{n}1}\sin\alpha + B_{\text{n}2}\sin\alpha;$$

$$\sin\alpha = \frac{h}{\sqrt{x^2+h^2}};$$

$$B_t = \frac{2I}{c\sqrt{x^2+h^2}}\cdot 2\frac{h}{\sqrt{x^2+h^2}} = \frac{4Ih}{c\left(x^2+h^2\right)},$$

B_t — поле между токами и такое же поле вблизи поверхности. Используя граничное условие запишем:

$$B_{2t} - B_{1t} = \frac{4\pi}{c}i(x) \to i(x) = \frac{c}{4\pi}B_t = \frac{Ih}{(x^2+h^2)}.$$

При $x = 0$:

$$f = \frac{IB}{c}l = \frac{I}{c}\cdot\frac{I}{c^2\cdot 2h} = \frac{I^2}{ch} = \frac{10^2\cdot 9\cdot 10^{18}}{9\cdot 10^{20}\cdot 1} = 1\ \frac{\text{дин}}{\text{см}}.$$

Задача 8.49.

Прямоугольный импульс тока $J = 200$ кА протекает за время $\Delta t = 10^{-4}$ с через гибкую металлическую полосу длиной $2l = 2$ м, шириной $a = 0,1$ м, сложенную вдвое и разделённую тонким непроводящим промежутком (рис. 10.5). Под полосой расположен твёрдый массивный стол, а сверху находится брусок с площадью основания $a \times l$ и массой $m = 1$ кг. Оценить скорость бруска после прохождения импульса тока по полосе.

Решение.

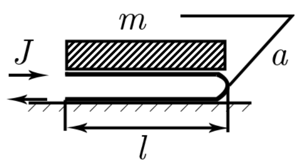

Рис. 10.5

Магнитное поле будет сосредоточено между токами.

$$H = B = \frac{4\pi}{c}\frac{J}{a}.$$

Магнитное давление:

$$p = \frac{B^2}{8\pi} = \frac{2\pi I^2}{c^2 a^2}.$$

Сила, действующая на брусок:

$$F = p \cdot al = \frac{2\pi J^2 l}{c^2 a};$$

$$mv = F\Delta t,$$

$$v = \frac{F\Delta t}{m} = \frac{2\pi J^2 l \Delta t}{mc^2 a} = 2500\ \frac{\text{см}}{\text{с}} = 25\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$