ЛЕКЦИЯ 11

СВЕРХПРОВОДНИКИ. КОЛЕБАНИЯ

Задача 7.64.

Шар радиусом R из сверхпроводника I рода внесён в постоянное однородное магнитное поле с индукцией B_0. Определить магнитное поле B вне шара, если поле B_0 ещё не разрушает сверхпроводимость в шаре. Найти также поверхностную плотность сверхпроводящего тока i и магнитный момент $\vec{M}$. **Решение.**

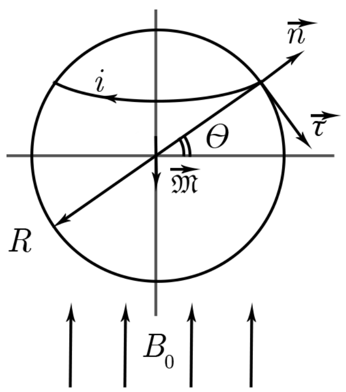

Рис. 11.1

Магнитное поле $B(r)$ есть векторная сумма внешнего поля и поля диполя:

$$\vec{B}(r) = \vec{B}_0 + \vec{B}_{\text{д}},$$

причём $r \geqslant R$, так как внутри шара поля нет. Поле диполя рассчитывается по формуле

$$\vec{B}_{\text{д}} = \frac{3\left(\vec{M}, \vec{r}\right)\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{M}}{r^3}.$$

Запишем граничное условие при $r = R$:

$$B_{\text{дn}} + B_{0\text{n}} = 0,$$

где n означает нормаль.

$$\left(\vec{M},\vec{R}\right) = MR\cos\theta;$$

$$B = B_0\cos\theta;$$

$$B_{\text{дп}}\Big|_{r=R} = \frac{3\cos\theta}{R^3} - \frac{M\cos\theta}{R^3} = \frac{2M\cos\theta}{R^3};$$

$$B_{\text{дп}} + B_{0\text{n}}\Big|_{r=R} = 0 = \frac{2M\cos\theta}{R^3} + B_0\cos\theta,$$

выражая $\vec{M}$, находим:

$$\vec{M} = -\frac{\vec{B}_0 R^3}{2}.$$

Далее, подставляем найденные выражения в формулу для внешнего магнитного поля:

$$B(r)\Big|_{r\geqslant R} = \vec{B}_0 + \vec{B}_{\text{д}} = \vec{B}_0\left(1 + \frac{R^3}{3r^3}\right) - \frac{3R^3\left(\vec{B}_0,\vec{r}\right)\vec{r}}{2r^5}.$$

Как видно из формулы, поле не радиально, а тангенциально, так как последний член равен нулю. Учитывая, что поле внутри шара равно нулю, и $Mu = 1$, из граничного условия найдём поле в каждой точке:

$$B_{\text{t}}(R) = \frac{4\pi}{c}i(\theta).$$

Из формулы для внешнего магнитного поля найдём тангенциальную составляющую:

$$B_{\text{t}}(R) = \frac{3}{2}B_0\sin\theta = \frac{4\pi}{c}i(\theta),$$

$$i(\theta) = \frac{3c}{8\pi}B_0\sin\theta.$$

Задача 9.8.

Последовательно соединенные дроссель L и омическое сопротивление присоединены к источнику постоянного тока с ЭДС $MathcalE$. Полное омическое сопротивление цепи равно R. Индуктивность дросселя, когда в него вставлен железный сердечник, равна L_1. Индуктивность же того дросселя без железного сердечника L_2. Вначале сердечник был вставлен. В момент времени $t = 0$, когда ток в цепи уже установился, очень быстро вынимают железный сердечник (в течение времени, пренебрежимо малого по сравнению с временем установления тока). Определить силу тока J в цепи в зависимости от времени t для $t > 0$.

Решение.

Скачкообразное изменение индуктивности привело к скачкообразному изменению тока. По закону сохранения магнитного потока:

$$\frac{1}{c}L_1\frac{MathcalE}{R} = \frac{1}{c}L_2J_0,$$

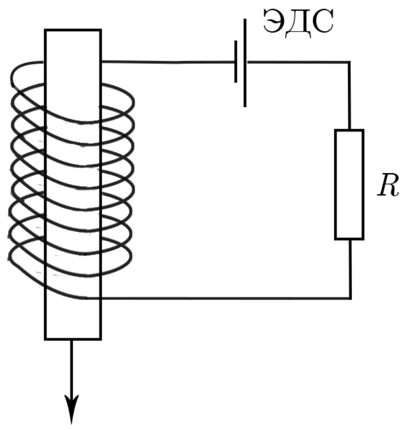

Рис. 11.2

$$J_0 = \frac{L_1}{L_2}\frac{MathcalE}{R}.$$

По второму закону Кирхгофа:

$$MathcalE - L_2\frac{dJ}{dt} = JR,$$

где член $L_2\dfrac{dJ}{dt}$ есть ЭДС самоиндукции, которая препятствует изменению тока. Решим получившееся дифференциальное уравнение, учитывая начальное условие:

$$\frac{L_2 dJ}{MathcalE - JR} = dt \to J(t) = \frac{MathcalE}{R}\left(1 - \frac{L_2 - L_1}{L_2}\,\mathrm{e}^{\left(-\frac{t}{\tau}\right)}\right),$$

где $\tau = \dfrac{L_2}{R}$ — постоянная времени цепи.

Задача 9.44 (упрощённая).

Генератор с весьма малым внутренним сопротивлением посылает в контур прямоугольный импульс напряжения. Пренебрегая затуханием, найти, при какой длительности импульса T в контуре отсутствуют колебания после прекращения импульса. Нарисовать графики тока и напряжения, начиная с момента t_0.

Решение.

Напряжение на конденсаторе:

$$V_\mathrm{C} = V_0 + A\cos(\omega t + \phi);$$

A и ϕ найдём из начальных условий:

$$t = 0,\ V_\mathrm{C} = 0,\ J = 0 = \frac{dq}{dt} = C\dot{V};$$

$$0 = V_0 + A\cos\phi;$$

$$0 = C\cdot A\omega\sin(\omega t + \phi) \to \phi = 0:\ A = -V_0;$$

$$V_C(t) = V_0(1 - \cos\omega t) \to J(t) = CV_0\omega\sin\omega t,$$

$$\omega T = 2\pi n \to T = \frac{2\pi n}{\omega} = 2\pi n\sqrt{LC}.$$

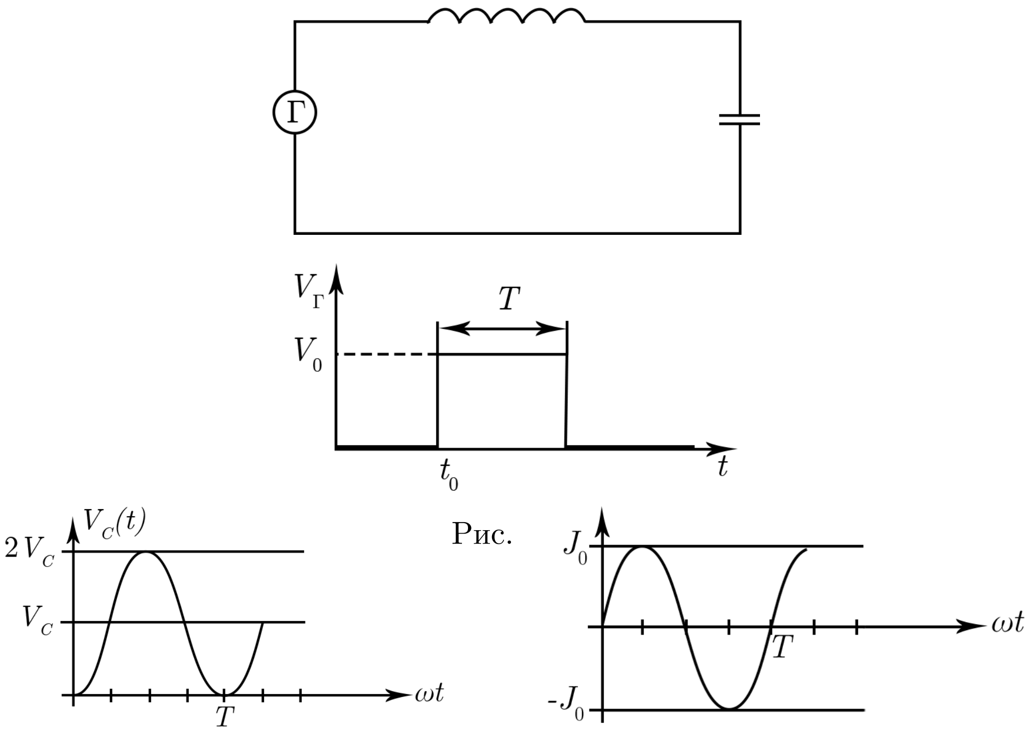

Рис. 11.4

Задача 9.15.

Цепь, состоящая из последовательно соединённых сопротивления R и большой индуктивности L, присоединена к источнику постоянного тока, поддерживающего на зажимах постоянное напряжение V_0. Для ограничения перенапряжений во время отключения источника параллельно с цепью включён конденсатор ёмкостью C. Определить напряжение на конденсаторе $V(t)$ после отключения источника постоянного напряжения. Параметры контура удовлетворяют условию $4L > CR^2$.

Решение.

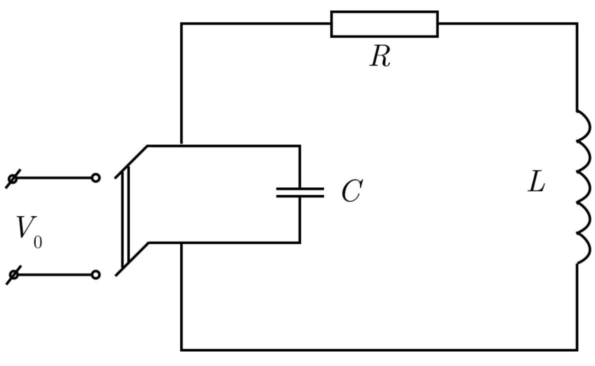

Рис. 11.5

Запишем закон Кирхгофа:

$$-L\frac{dJ}{dt} = V_{\text{C}} + JR = \frac{q}{c} + \dot{q}R,$$

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0 \to \ddot{q} + 2\frac{R}{2L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0,$$

где $\frac{R}{2L} = \delta$ — коэффициент затухания, а $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$ — собственная частота колебаний идеального контура. Предыдущее уравнение будет иметь стандартный вид:

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0,$$

для токов:

$$\ddot{J} + +2\delta\dot{J} + \omega_0^2 J = 0.$$

Несмотря на то, что одно уравнение вытекает из другого, решения будут разными, так как разные начальные условия:

$$q(0) = V_0 C,$$

$$\dot{q}(0) = -\frac{V_0}{R},$$

знак «минус» означает, что ток на конденсаторе будет убывать. Запишем характеристическое уравнение:

$$p^2 + 2\delta p + \omega_0^2 = 0,$$

$$p_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2},$$

$$\delta^2 - \omega_0^2 = \frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} = \frac{1}{4L^2C}\left(R^2C - 4L\right),$$

так как $4L > CR^2$ по условию, то $\delta^2 - \omega_0^2 < 0$, значит, решение колебательное:

$$p_{1,2} = -\delta \pm i\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta \pm i\omega,$$

где $\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = \omega$ — смещённая частота.

$$q(t) = \mathrm{e}^{\delta t}\left(A\sin\omega t + B\cos\omega t\right),$$

где A и B являются неопределёнными коэффициентами, определяемые через начальные условия. Ответ:

$$V_{\mathrm{C}}(t) = \frac{q(t)}{C} = V_0\,\mathrm{e}^{-\delta t}\left[\cos t + \left(\frac{\delta}{\omega} - \frac{1}{RC\omega}\right)\sin\omega t\right].$$

Задача 9.30.

После размыкания ключа в контуре возникают медленно затухающие колебания, максимальная амплитуда напряжения которых в $n = 100$ раз превосходит напряжение батареи. Найти собственную частоту контура ω_0, если уменьшение амплитуды колебаний в e раз происходит за время $\tau = 0{,}1$ с.

Решение.

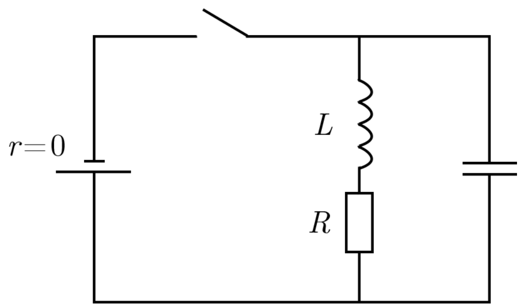

Рис. 11.6

Начальный ток через катушку:

$$J_{\mathrm{L}} = \frac{MathcalE}{R}.$$

Поскольку затухание мало, то можно считать, что в пределах одного периода энергия сохраняется:

$$\frac{LJ_{\mathrm{L}}^2}{2} = \frac{CV_0^2}{2} \to \frac{MathcalE^2}{R^2}L = CV_0^2,$$

$$\frac{V_0}{MathcalE} = n = \sqrt{\frac{L}{R^2C}} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = Q = 100.$$

Так как $\delta = \dfrac{1}{\tau}$, а $Q = \dfrac{\omega_0}{2\delta}$, найдём собственную частоту ω_0:

$$Q = \frac{\omega_0\tau}{2} \to \omega_0 = \frac{2Q}{\tau} = \frac{2n}{\tau} = \frac{200}{0{,}1} = 2000\ \frac{\text{рад}}{\text{с}},$$

$$f = \frac{2000}{2\pi} \approx 320\ \text{Гц}.$$

Задача 9.53.

Резонансный контур $L - R - C$ раскачивается периодически последовательными импульсами, такими, что каждый отдельный импульс создает на конденсаторе дополнительное напряжение V. Промежутки времени между двумя последовательными импульсами в целое число n раз больше периода собственных колебаний. Определить амплитуду V_0 установившихся колебаний, считая декремент затухания контура малым.

Решение.

Запишем напряжение, учитывая затухание и подкачку:

$$V_0 = V_0\,\mathrm{e}^{-\delta nT} + V,$$

первый член есть «старое» колебание, которое за время nT потеряло часть энергии, а V — дополнительное напряжение.

$$Q = \frac{\pi}{\delta T} \to \delta T = \frac{\pi}{Q}.$$

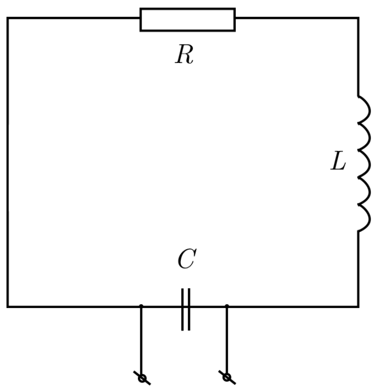

Рис. 11.7

Подставляя это соотношение в уравнение для напряжения и раскладывая экспоненту в ряд Тейлора, найдём ответ:

$$V_0 = \frac{V}{1 - \mathrm{e}^{-\delta n T}} \approx \frac{V}{\delta n T} = \frac{VQ}{n\pi} = \frac{V}{n\pi R}\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Пример.

Как изменится добротность $R-C-L$ контура, при условии, что $R \ll \sqrt{\frac{L}{C}}$, при замыкании накоротко сверхпроводящей катушки L, если коэффициент взаимной индукции $M = \frac{4}{5}L$? Как изменится добротность контура, если после замыкания ключа K, изменением ёмкости настроить контур на прежнюю частоту?

Решение.

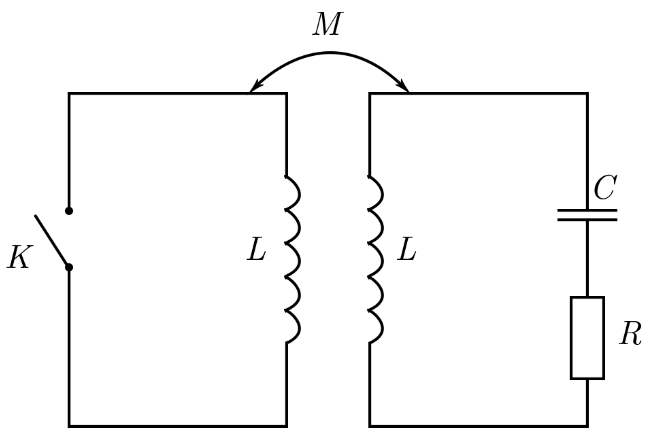

Рис. 11.8

При разомкнутом ключе:

$$Q_0 = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

При замыкании в контуре справа возникают колебания:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} + M\ddot{q}' = 0,$$

последний член описывает ЭДС индукции, которая возникает благодаря коэффициенту взаимной индукции. Для левого контура:

$$L\ddot{q}' + M\ddot{q} = 0 \to \ddot{q}' = -\frac{M}{L}\ddot{q}.$$

Подставляя в уравнение для правого контура получаем уравнение колебаний:

$$\left(L - \frac{M^2}{L}\right)\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0,$$

$$\ddot{q} + 2\frac{R}{2\left(L - \frac{M^2}{L}\right)}\dot{q} + \frac{q}{\left(L - \frac{M^2}{L}\right)C} = 0.$$

Учитывая, что $\frac{R}{2\left(L - \frac{M^2}{L}\right)} = \delta$, а $\frac{1}{\left(L - \frac{M^2}{L}\right)C} = \omega_1^2$, найдём ответ на первый вопрос:

$$Q_1 = \frac{\omega_1}{2\delta_1} = \frac{L - \frac{M^2}{L}}{\sqrt{\left(L - \frac{M^2}{L}\right)C}R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L - \frac{M^2}{L}}{C}} \to \frac{Q_1}{Q_0} = \sqrt{1 - \frac{M^2}{L^2}} = \frac{3}{5}.$$

Ответ на второй вопрос:

$$Q_2 = \frac{\omega_0}{2\delta},$$

$$\frac{Q_2}{Q_0} = \frac{\delta_0}{\delta_1} = \frac{L - \frac{M^2}{L}}{L} = 1 - \frac{M^2}{L^2} = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}.$$