ЛЕКЦИЯ 12

КОЛЕБАНИЯ

1. Вынужденные колебания

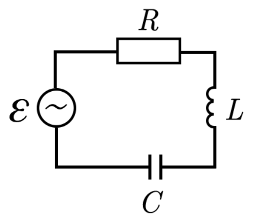

Рис. 12.1

Источник колебаний $MathcalE$ запитывает последовательный колебательный контур, состоящий из сопротивления R, катушки индуктивности L и конденсатора емкостью C.

$$MathcalE(t) = MathcalE_0 \cos(\Omega t + \phi).$$

Запишем уравнение колебаний.

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{c}\int \; I\,dt = MathcalE_0 \cos(\Omega t + \phi).$$

Сумма ЭДС, действующих в контуре, равна сумме падений напряжений на элементах контура. Сумма падений напряжений равна:

$$RI + \frac{1}{c}\int \; I\,dt.$$

ЭДС самоиндукции равна:

$$-L\frac{dI}{dt}.$$

В данном случае $L\frac{dI}{dt}$ выступает в качестве напряжения на катушке.

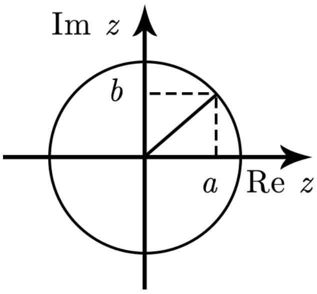

Рис. 12.2

Решать такое уравнение удобно при помощи**метода комплексных амплитуд**. Рассмотрим тригонометрический круг.

По оси x отложим действительную часть комплексного числа $\hat{z}$, а по оси y — мнимую.

$$\hat{z} = a + bi,$$

где $i = \sqrt{-1}$. Пусть $|\hat{z}| = 1$. Тогда получим (см. рис. 12.2):

$$a = \cos\phi, \quad b = \sin\phi.$$

Откуда следует, что:

$$\hat{z} = \cos\phi + i\sin\phi = \mathrm{e}^{i\phi},$$

где ϕ — **фаза комплексного числа**.

$$\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}} = i, \quad \mathrm{e}^{i\pi} = -1, \quad \mathrm{e}^{2\pi i} = 1.$$

$$\cos\phi = \Re\hat{z}.$$

Перейдем из действительной области в комплексную.

$$L\frac{d\hat{I}}{dt} + R\hat{I} + \frac{1}{c}\int \hat{I}\,dt = Mat\hat{h}calE_0\cos(\Omega t + \phi), \quad Mat\hat{h}calE_0 = MathcalE_0\,\mathrm{e}^{i\phi}.$$

Решение будем искать в виде:

$$\hat{I} = \hat{I}_0\,\mathrm{e}^{i\Omega t}.$$

Тогда получим:

$$\hat{I}_0\underbrace{[R + i(\Omega L - \frac{1}{\Omega C})]}_{\hat{Z}} = Mat\hat{h}calE_0,$$

где $\hat{Z}$ — **импеданс колебательного контура**. Его можно представить в виде:

$$\hat{Z} = |Z|\,\mathrm{e}^{i\psi},$$

$$|Z| = Z_0 = \sqrt{R^2 + (\Omega L - \frac{1}{\Omega C})^2}, \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{\Omega L - \frac{1}{\Omega C}}{R}.$$

Величины ΩL и $\frac{1}{\Omega C}$ называют **импедансом** или **сопротивлением переменного тока** катушки и конденсатора соответственно. Также ΩL называют **реактивным сопротивлением** катушки.

Тогда получим:

$$\hat{I} = \frac{\widehat{MathcalE_0}}{\hat{Z}}\, e^{i\Omega t} = \frac{MathcalE_0\, e^{i\phi}}{Z_0\, e^{i\psi}}\, e^{i\Omega t} = \frac{MathcalE_0}{Z_0}\, e^{i(\Omega t + \phi - \psi)}.$$

Запишем решение в действительном виде:

$$I(t) = \frac{MathcalE_0}{Z_0}\cos(\Omega t + \phi - \psi).$$

Рассмотрим векторную диаграмму (см. рис. 12.3). Представим силу тока в качестве вектора, вращающегося с угловой скоростью Ω. В любой момент времени вектор тока представляет собой проекцию на заданное направление.

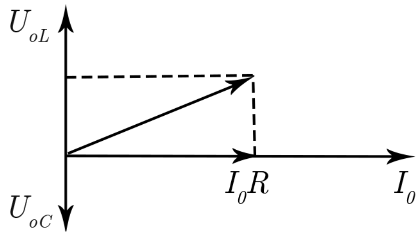

Рис. 12.3

Напряжение на резисторе — это падение напряжения, совпадающее по фазе с током. Напряжение на катушке опережает по фазе ток на $\frac{\pi}{2}$. Отставание возникает из-за самоиндукции катушки. Для конденсатора все наоборот. Ток по фазе опережает напряжение на $\frac{\pi}{2}$.

Сложим все вектора напряжения и получим вектор $MathcalE_0$. Отсюда видно, что он опережает вектор тока на угол ψ. Если $\psi = 0$, то падение напряжения на конденсаторе и катушке равны по модулю и компенсируют друг друга. В этом случае наступает **резонанс**. Это означает, что

$$|\hat{Z}| = R.$$

В этом случае:

$$U_{0L} = U_{0C} = QMathcalE,$$

где Q — **добротность**.

$$i_0 = \frac{MathcalE_0}{R},$$

$$U_{oC} = i_0 X_c = i_0\,\frac{1}{\Omega C} = \frac{MathcalE_0}{R\Omega C} = \frac{MathcalE_0}{Q},$$

где X_C — **импеданс конденсатора**.

Аналогичное соотношение можно получить и для катушки.

Рассмотрим фазовую характеристику колебательного контура.

Если контур идеальный ($R = 0$), то сдвиг по фазе составляет $\frac{\pi}{2}$ или $-\frac{\pi}{2}$. Скачок будет происходить на резонансной частоте ω_0.

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

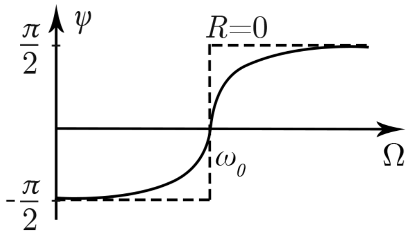

Рис. 12.4

При малых частотах в контуре преобладает емкостной характер сопротивления. Когда $\Omega > \omega_0$, основное сопротивление достигается на катушке. Если $R \neq 0$, то характеристика будет иметь вид арктангенса (см. рис. 12.4).

Задача 10.56.

В схеме (см. рис. 12.5) требуется получить сдвиг фаз 90° между входным напряжением V и выходным напряжением U. При каком соотношении между параметрами схемы это возможно? Построить для этого случая векторную диаграмму для напряжений на элементах системы.

Решение.

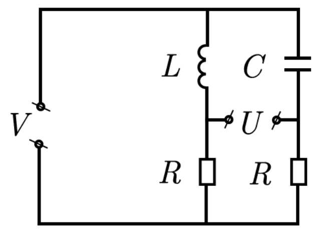

Рис. 12.5

Обозначим левую цепочку индексом 1, а правую — индексом 2.

$$\hat{I}_1 = \frac{\hat{V}}{R + i\Omega L}, \quad \hat{I}_2 = \frac{\hat{V}}{R + \frac{1}{i\Omega C}}.$$

$$\hat{V}_{R_1} = R\hat{I}_1 = \frac{\hat{V}R}{R + i\Omega L},$$

$$\hat{V}_{R_2} = R\hat{I}_2 = \frac{\hat{V}R}{R + \frac{1}{i\Omega C}} = \frac{i\hat{V}R\Omega C}{1 + iR\Omega C}.$$

Тогда

$$\hat{U} = \hat{V}_{R_1} - \hat{V}_{R_2} = \hat{V}R\left[\frac{1}{R + \frac{1}{i\Omega C}} - \frac{i\Omega C}{1 + iR\Omega C}\right] =$$

$$= \hat{V}R\frac{1 + iR\Omega C - iR\Omega C + \Omega^2 LC}{R(1 - \Omega^2 LC) + i(L + CR^2)} = \hat{V}RK.$$

Нужно получить сдвиг фаз 90° между входным и выходным напряжениями. Это возможно, если коэффициент K чисто мнимый, т. е.

$$1 - \Omega^2 LC = 0, \quad \Omega^2 = \frac{1}{LC}.$$

$$\hat{U} = -\frac{2i\hat{V}R}{\Omega(L + CR^2)} = -i\frac{2R\sqrt{LC}}{L + CR^2}\hat{V}.$$

Рассмотрим векторную диаграмму.

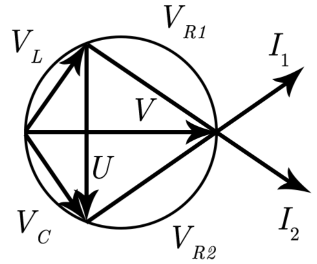

Рис. 12.6

Рассмотрим вектора напряжений. Заметим, что их концы будут лежать на окружности с диаметром V. Векторная диаграмма вращается с угловой скоростью Ω. Таким образом, данная схема представляет собой **фазовращатель**. Положение точки на окружности можно регулировать изменением сопротивления резисторов, т. е. с помощью резистора можно менять фазу между входом и выходом.

Задача 10.27.

Дан черный ящик с двумя внешними клеммами. Внутри него собрана схема из индуктивности с малыми омическими потерями, емкости и сопротивления. Известно, что если подать на клеммы постоянное напряжение 1 В, то ток будет равен 10 мА. При переменном напряжении 1 В на частоте 50 Гц ток равен 10 мА. С ростом частоты ток падает, достигает минимума при частоте 500 Гц, а затем постоянно возрастает до предельного значения 10 мА. Нарисовать схему черного ящика и определить ее параметры.

Решение.

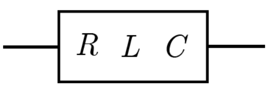

Рис. 12.7

В данной задаче речь идет о **резонансе токов**, который достигается при параллельном соединении элементов L и C. Т. к. и на нулевой частоте, и на очень большой частоте ток равен 10 мА, то это говорит о том, что элементы L и C равноправны. Следовательно, резистор подключен последовательно.

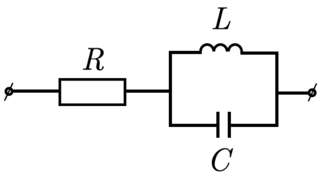

Рис. 12.8

Такой контур, где элементы L и C включены параллельно друг другу, называется **фильтр-пробка**.

Рассмотрим зависимость тока от частоты.

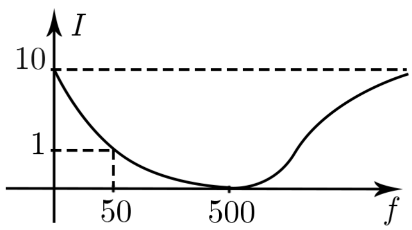

Рис. 12.9

При резонансе ток контура равен нулю, а импеданс равен бесконечности.

$$\hat{Z} = \frac{\hat{X}_L \hat{X}_C}{\hat{X}_L + \hat{X}_C} = \frac{\Omega L \cdot \frac{1}{\Omega C}}{\Omega L - \frac{1}{\Omega C}}.$$

Найдем активное сопротивление (на постоянном токе).

$$R = \frac{U_=}{I_=} = \frac{1\text{В}}{10^{-2}\text{mA}} = 100 \text{ Ом}.$$

$$LC = \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{1}{(2\pi \cdot 500)^2} \approx 10^{-7}\text{c}^2.$$

При $\omega \neq \omega_0$ получим:

$$\hat{Z} = R + \frac{1}{i\Omega C + \frac{1}{i\Omega L}} = R + \frac{i\Omega L}{1 - \Omega^2 LC} = R + i\frac{\Omega L}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}}.$$

При частоте $f = 50$ Гц

$$|\hat{Z}| = \frac{\sim 1\text{В}}{\sim 10^{-3}\text{А}} = 1000 \text{ Ом}.$$

Заметим, что:

$$|\hat{Z}|^2 \gg R^2,$$

$$\Omega^2 \ll \omega_0^2.$$

Тогда получим:

$$|\hat{Z}|^2 = R^2 + \left(\frac{\Omega L}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0}}\right)^2 \approx \left(\frac{\Omega L}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0}}\right)^2 \approx \Omega L.$$

Отсюда следует, что:

$$L = \frac{|\hat{Z}|}{\Omega} = \frac{10^3}{2\pi \cdot 50} = 3{,}2 \text{ Гн},$$

$$C = \frac{LC}{L} = \frac{10^{-7}}{3{,}2} = 3{,}14 \cdot 10^{-8}\Phi = 0{,}031 \text{ мк}\Phi.$$

Задача 10.12.

Показать, что в контуре (см. рис. 12.10) амплитуда силы тока I при отклонении частоты внешней ЭДС на небольшую величину δf от резонансной частоты f_0 будет связана с амплитудой силы тока при резонансе I_0 следующим соотношением:

$$I = \frac{I_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\Delta f}{f_0}\right)^2 Q^2}},$$

где $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ — добротность контура.

Решение.

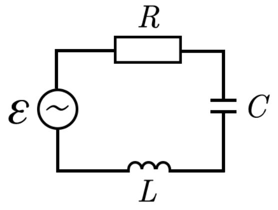

Рис. 12.10

Пусть Ω — частота источника, ω_0 — резонансная частота.

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\Omega L - \frac{1}{\Omega C})}} = \frac{U/R}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Omega L}{R} - \frac{1}{\Omega RC}\right)^2}}.$$

Рассмотрим величину

$$\frac{\Omega L}{R} - \frac{1}{\Omega RC}.$$

Домножим ее на ω_0.

$$\frac{\Omega L \omega_0}{R\omega_0} - \frac{\omega_0}{\Omega RC\omega_0} = Q^2\left[\frac{\Omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\Omega}\right]^2 = Q^2\left[\frac{(\Omega - \omega_0)(\Omega + \omega_0)}{\omega_0\Omega}\right]^2.$$

Вблизи резонанса $\omega_0 \approx \Omega$. Обозначим $\Omega - \omega_0 = \Delta\Omega$, $\Omega + \omega_0 = 2\omega_0$. Тогда получим:

$$I = \frac{I_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{2\delta f}{f_0}\right)^2}} = \frac{I_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{2\Delta\Omega}{\omega_0}\right)^2}}.$$

Построим график зависимости $\frac{\Delta\Omega}{\omega_0}$ от $\frac{I}{I_0}$.

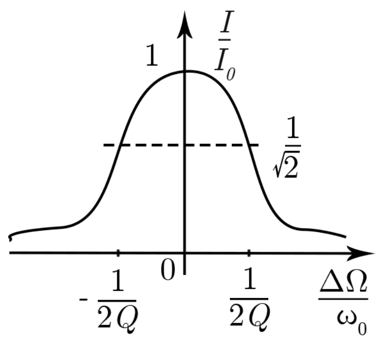

Рис. 12.11

Рассмотрим ширину графика на высоте $\frac{I}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Получим:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{2\Delta\Omega}{\omega_0}\right)^2}},$$

$$Q^2\left(\frac{2\Delta\Omega}{\omega_0}\right)^2 = 1, \quad \Rightarrow \quad \frac{2\Delta\Omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}.$$

Рассмотрим частотную характеристику колебательного контура.

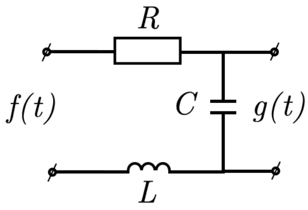

Рис. 12.12

Пусть входной сигнал $f(t)$, выходной сигнал $g(t)$ — напряжение на конденсаторе. Пусть $\widehat{f} = \mathrm{e}^{i\omega t}$. Найдем, чему равен сигнал $g(t)$.

$$L\ddot{q} + \dot{q}R + \underbrace{\frac{q}{C}}_{g(t)} = \mathrm{e}^{i\omega t}.$$

Следовательно:

$$\dot{q} = c\dot{g}, \quad \ddot{g} = c\ddot{g}.$$

Тогда получим:

$$LC\ddot{g} + RC\dot{g} + g = \mathrm{e}^{i\omega t},$$
$$\ddot{g} + 2\delta\dot{g} + \omega_0^2 g = \omega_0^2\,\mathrm{e}^{i\omega t}.$$

Таким образом, было получено уравнение колебаний. Решение будем искать в виде:

$$\widehat{g}(t) = \widehat{H}(\omega)\,\mathrm{e}^{i\omega t},$$

где $\widehat{H}(\omega)$ — **частотно-фазовая характеристика**. Тогда получим:

$$-\omega^2\widehat{H} + 2\delta i\omega\widehat{H} + \omega_0^2\widehat{H} = \omega_0^2.$$

$$\widehat{H}(\omega) = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\delta\omega}.$$

$|\widehat{H}(\omega)|$ — **частотная характеристика** (см. рис. 12.13).

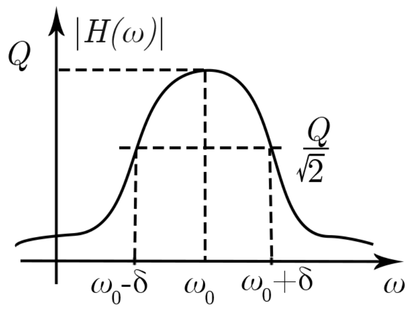

Рис. 12.13

$$|\widehat{H}(\omega)| = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{4\delta^2\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}}.$$

$\phi(\omega)$ — **фазовая характеристика**.

$$\phi(\omega) = \arctan \frac{-2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Задача 10.20.

При снятии резонансной кривой колебательного контура (см. рис. 12.14) с малым затуханием найдено: выходное напряжение максимально при частоте $f_0 = 1{,}6$ кГц; при частотах $f \ll f_0$ это напряжение равно $V_0 = 1$ В. Чему равно выходное напряжение V_1 при частоте $f_1 = 16$ кГц?

Решение.

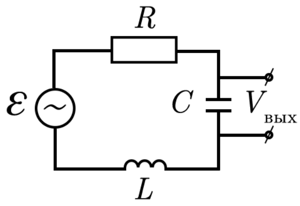

Рис. 12.14

Источник: $MathcalE_0\, \mathrm{e}^{i\Omega t}$.
На выходе: $\hat{V}_{\text{вых}} = \hat{H}(\Omega) MathcalE_0\, \mathrm{e}^{i\Omega t}$.

$$|\hat{H}(\Omega)| = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{4\delta^2\Omega^2 + (\omega_0^2 - \Omega^2)^2}} = \frac{\omega_0^2}{\Omega\sqrt{4\delta^2 + \frac{1}{\Omega^2}(\omega_0^2 - \Omega^2)^2}}.$$

Значением δ можно пренебречь (по условию). Тогда получим:

$$|\hat{H}(\Omega)| \approx \frac{\omega_0^2}{|\omega_0^2 - \Omega^2|}.$$

Откуда следует:

$$\hat{V}_{\text{вых}} = \frac{\omega_0^2 MathcalE_0\, \mathrm{e}^{i\Omega t}}{|\omega_0^2 - \Omega^2|}.$$

Вдали от резонанса при $\Omega \ll \omega_0$:

$$\hat{V}_{0\ \text{вых}} \approx \frac{\omega_0^2 MathcalE_0\, \mathrm{e}^{i\Omega t}}{\omega_0^2} = MathcalE_0\, \mathrm{e}^{i\Omega t},$$

$$|\hat{V}_{0\ \text{вых}}| = MathcalE_0 = 1 \text{ В}.$$

При $\Omega \gg \omega_0$ получим:

$$\hat{V}_{1\ \text{вых}} \approx \frac{\omega_0^2 MathcalE_0\, \mathrm{e}^{i\Omega t}}{\Omega^2},$$

$$|\hat{V}_{1\ \text{вых}}| = MathcalE_0 \left|\frac{f_0}{f}\right|^2 = 10^{-2} \text{ В}.$$