ЛЕКЦИЯ 13

СПЕКТРЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

Если воздействовать на колебательный контур гармоническим сигналом, то на выходе будет тоже гармонический сигнал. Подавая на вход какой-либо сигнал, его можно разложить по гармоническим функциям и, просуммировав их, на выходе можно получить выходной сигнал.

Если сигнал периодический $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, то сигнал может быть представлен в виде:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t,$$

где n — **номер гармоники** или **мода**. Первая мода ($n = 1$) называется **основной гармоникой**. a_0 — **постоянная составляющая**.

$$a_0 = \frac{1}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} f(t)\, dt,$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos \omega_0 nt\, dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin \omega_0 nt\, dt.$$

Если функция четная, то $b_n = 0$. Если функция нечетная, то $a_n = 0$.

Помимо такого разложения существует **разложение в ряд Фурье** по гармоническим функциям.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n\, \mathrm{e}^{in\omega_0 t}, \quad C_n = \frac{1}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} f(t)\, \mathrm{e}^{in\omega_0 t}\, dt.$$

Если сигнал непериодический, то используют **интеграл Фурье**.

$$f(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(\omega)\, \mathrm{e}^{i\omega t}\, d\omega,$$

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \mathrm{e}^{-i\omega t}\, dt,$$

где $g(\omega)$ — **спектральная амплитуда**.

Функция $g(\omega)$ используется довольно редко. Интерес представляет функция $I(\omega)$ — **спектральная интенсивность** непериодического сигнала в пределах частоты от ω до $\omega + \Delta\omega$.

$$I(\omega) = |g(\omega)|^2 = g(\omega) g^*(\omega).$$

Она показывает вклад в энергию спектра.

Пример 1 Рассмотрим сигнал следующего вида:

$$f(t) = a\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\,\mathrm{e}^{i\omega_0 t}, \quad t \geqslant 0.$$

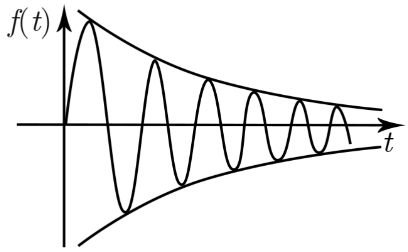

Рис. 13.1

В классической физике модель излучения атома происходит согласно этому закону. Каждый атом излучает энергию в произвольный момент времени. Тогда в данный момент времени есть среднее количество излучателей. Такая сумма излучений обладает теми же свойствами, которые наблюдаются на опыте. Рассмотрим спектр такого сигнала.

$$g(\omega) = \frac{a}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{[i(\omega_0-\omega)t-\frac{t}{\tau}]}\,dt = \frac{-a/2\pi}{i(\omega_0-\omega)-\frac{1}{\tau}},$$

$$I(\omega) = gg^* = \frac{a^2/4\pi^2}{(\omega_0-\omega)^2+\frac{1}{\tau^2}}.$$

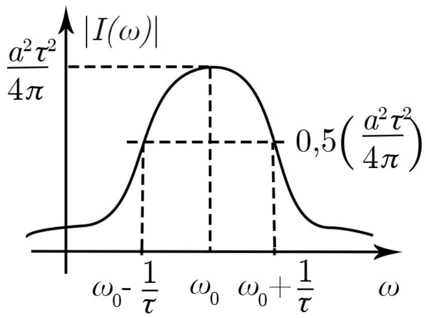

Рис. 13.2

На высоте $0{,}5\left(\frac{a\tau}{2\pi}\right)^2$ ширина спектра равна:

$$\frac{a^2\tau^2}{4\pi(\tau^2(\omega_0-\omega)^2+1)} = \frac{a^2\tau^2}{2\cdot 4\pi^2},$$

$$\tau^2(\omega_0-\omega)+1 = 2,$$

$$\Delta\omega = \frac{2}{\tau}.$$

Эту кривую называют **Лоренцев контур**.

В данном примере выполняется соотношение

$$\Delta\omega = 2.$$

Если рассмотреть другой сигнал (например, **цуг**) (см. рис. 13.3), то будет справедливо равенство:

$$\Delta\omega = 4\pi.$$

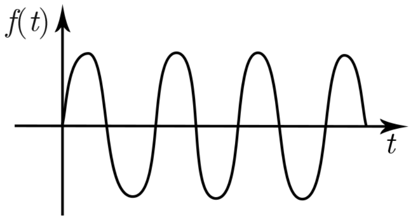

Рис. 13.3

Для для каждого сигнала значение $\Delta\omega$ будут различными. Но в любом случае будет выполняться **соотношение неопределенностей**:

$$\Delta\omega \approx 2\pi,$$

$$\Delta f\tau \approx 1.$$

Смысл заключается в том, что чем короче сигнал по времени, тем шире его спектр. Например, спектр в виде δ-функции имеет сигнал вида $\sin t$ на интервале от $-\infty$ до $+\infty$. Если ограничить ширину сигнала, то спектр будет не δ-функцией. Спектр начнет «разъезжаться».

Соотношение неопределенностей широко используется в квантовой физике.

Задача 11.16.

Сигнал выпрямителя имеет вид $V(t)$ (половинки косинусоид) (см. рис. 13.4). Его подают на схему (см. рис. 13.5). Контур L, C настроен на частоту ω_0; $R \gg \omega_0 L$ и $R \gg r$. Считая контур идеальным, определить форму сигнала $V_R(t)$.

Решение.

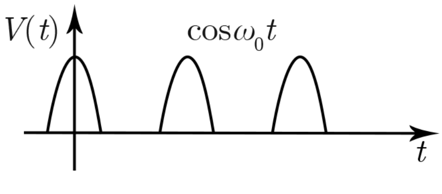

Рис. 13.4

$$a_0 = \frac{1}{T}\int\limits_{-T/4}^{T/4} \cos\omega_0 t\,dt = \frac{1}{\pi}.$$

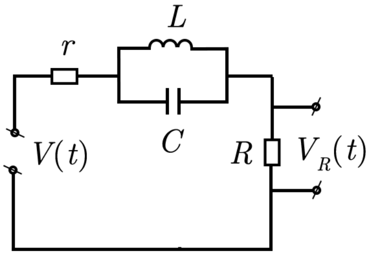

Рис. 13.5

Найдем первую гармонику.

$$a_1 = \frac{2}{T}\int\limits_{-T/4}^{T/4} \cos\omega_0 t \cos\omega_0 t\, dt = \frac{1}{2}.$$

Амплитуда первой гармоники равна $\frac{1}{2}$. Т. к. контур настроен на частоту ω_0, то сопротивление контура на частоте ω_0 равно бесконечности. Значит, первая гармоника не проходит, и ее ток равен нулю. Однако остальные гармоники пройдут через контур. В силу того, что $R \gg \omega_0 L$ и $R \gg r$, напряжение в основном падает на резисторе R. Сопротивлением r для постоянной составляющей можно пренебречь. Вторая гармоника $\omega = 2\omega_0$ проходит, т. к. $R \gg \omega_0 L$, $R \gg \frac{1}{\omega_0 C}$. Третья гармоника пройдет практически без искажений. Таким образом, на выходе будут все гармоники, кроме первой.

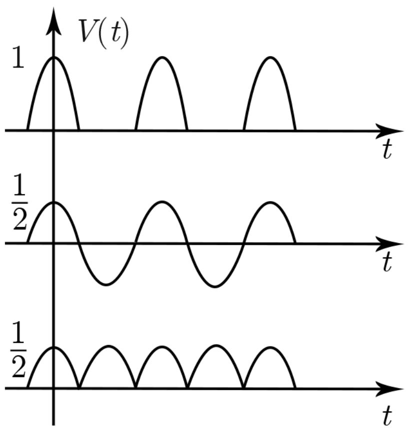

Рис. 13.6

На такой схеме однополупериодный сигнал можно превратить в двухполупериодный с соответствующими потерями по амплитуде.

Задача 11.15.

На вход колебательного контура (см. рис. 13.7) подается периодическая последовательность прямоугольных импульсов (см. рис. 13.8), длительность которых в 4 раза меньше величины периода. Частота повторения импульсов совпадает с резонансной частотой контура. Вычислить отношение амплитуд второй гармоники к первой на выходе контура, если его добротность $Q = 100$.

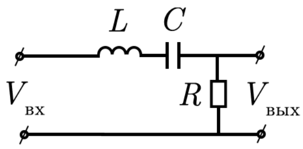

Рис. 13.7

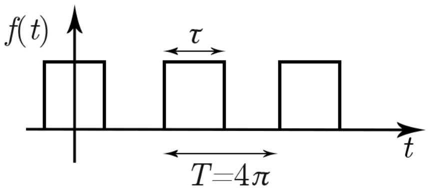

Рис. 13.8

Решение.

Разложим последовательность прямоугольных импульсов на спектральные компоненты. После чего каждую из этих компоненты пропустим через колебательный контур. Удобнее всего раскладывать сигнал в комплексный спектр.

$$C_n^{\text{вх}} = \frac{1}{T}\int\limits_{-\tau/2}^{\tau/2} A\,\mathrm{e}^{-in\omega t}\,dt = \frac{A}{T(-in\omega)}\left[\mathrm{e}^{-in\omega\frac{\tau}{2}} - \mathrm{e}^{in\omega\frac{\tau}{2}}\right] =$$

$$= \frac{A\tau}{T}\cdot\frac{\sin\frac{n\pi\tau}{4}}{\frac{n\pi\tau}{4}} = \frac{A}{4}\cdot\frac{\sin n\frac{\pi}{4}}{n\frac{\pi}{4}}.$$

Рассмотрим первые две гармоники.

$$C_1^{\text{вх}} = \frac{A}{\pi}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{A}{\sqrt{2}\pi},$$

$$C_2^{\text{вх}} = \frac{A}{2\pi}.$$

На резонансной частоте $U_1^{\text{вых}} = C_1^{\text{вх}}$, т. к. падения напряжения на катушке и конденсаторе находятся в противофазе и компенсируют друг друга.

$$U_2^{\text{вых}} = \frac{C_2^{\text{вх}} R}{\sqrt{R^2 + (\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C})^2}},$$

где

$$\omega_2 = 2\omega_0 = \frac{2}{\sqrt{LC}}.$$

Вспомним, что $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$. Тогда получим:

$$U_2^{\text{вых}} = \frac{C_2^{\text{вх}}}{\sqrt{1 + \frac{(2\sqrt{\frac{L}{C}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}})^2}{R^2}}} = \frac{C_2^{\text{вх}}}{\sqrt{1 + Q^2(2-\frac{1}{2})^2}} \approx \frac{2}{3}\,\frac{C_2^{\text{вх}}}{Q}.$$

Откуда следует, что:

$$\frac{U_2^{\text{вых}}}{U_1^{\text{вых}}} = \frac{\frac{2}{3}\frac{C_2^{\text{вх}}}{Q}}{C_1^{\text{вх}}} = \frac{2}{3Q}\frac{\frac{A}{2\pi}}{\frac{A}{\sqrt{2}\pi}} = \frac{\sqrt{2}}{3Q} \approx 0{,}0047.$$

1. Амплитудно-модулированный и фазово-модулированный сигнал

Амплитудно-модулированный сигнал:

$$f(t) = A(1 + m\cos\Omega t)\cos\omega t,$$

где ω — **несущая частота**, Ω — **модулирующая частота**, m — **глубина модуляции**, $m < 1$.

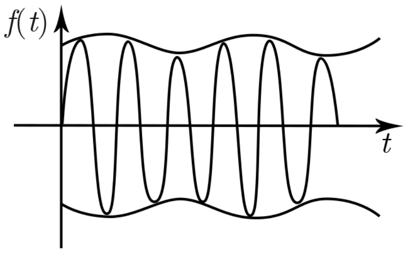

Рис. 13.9

Говорят, что медленная частота модулирует быструю. На практике медленная частота — это скорость звука. Для того чтобы передать сигнал на большое растояние (~ 100 км), необходимо, чтобы длина волны было достаточно большой (~ 1 км).

Спектр такого сигнала будет следующим:

$$f(t) = A\cos\omega t + \frac{Am}{2}\cos(\omega - \Omega)t + \frac{Am}{2}\cos(\omega + \Omega)t.$$

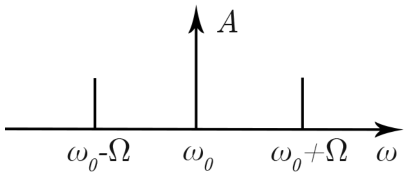

Рис. 13.10

Векторная диаграмма амплитудно-модулированного сигнала:

Фазово-модулированный сигнал:

$$f(t) = A\cos[\omega_0 t + m\cos\Omega t],$$

$$m \ll 1, \quad \Omega \ll \omega_0.$$

Или в экспоненциальном виде:

$$\widehat{f(t)} = A\,\mathrm{e}^{i[\omega_0 t + m\cos\Omega t]}\,.$$

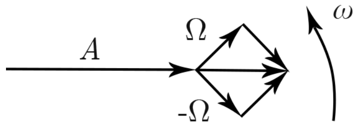

Рис. 13.11

Спектр такого сигнала будет следующим:

$$f(t) = A(\mathrm{e}^{i\omega t} + \frac{im}{2}\,\mathrm{e}^{i(\omega_{\Omega})t} + \frac{im}{2}\,\mathrm{e}^{i(\omega+\Omega)t}).$$

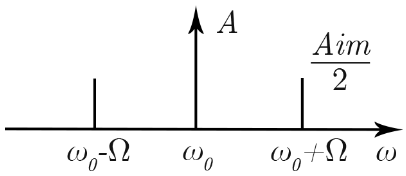

Рис. 13.12

Векторная диаграмма фазово-модулированного сигнала:

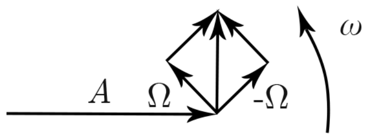

Рис. 13.13

Задача 11.2.

В приемниках радиоизлучения обычно осуществляется квадратичное преобразование принимаемого сигнала с последующим усреднением за некоторое время Δt, подчиняющееся условию $2\pi/\omega_0 \ll \Delta t \ll 2\pi/\Omega$, где ω_0 — радиочастота, Ω — частота модуляции ($\omega_0 \gg \Omega$). Что зарегистрирует такой приемник, если на вход подан амплитудно-модулированные колебания?

Решение.

$$U_{\text{вых}} = \overline{[f(t)]^2},$$

$$f(t) = A(t)\cos\omega_0 t, \quad A(t) = A(1 + m\cos\Omega t),$$

$$\overline{f^2(t)}^{\Delta t} = \frac{A^2(t)}{\Delta t}\int\limits_{t-\frac{\Delta t}{2}}^{t+\frac{\Delta t}{2}}\cos^2\omega t\,dt = \frac{A^2(t)}{\Delta t}\,\frac{\Delta t}{2} = \frac{A^2(t)}{2}.$$

Задача 11.36.

Для поддержания незатухающих колебаний в LRC-контуре ($L = 4\cdot 10^{-3}$ Г, $C = 10^{-10}$ Ф, $R = 1$ Ом) емкость конденсатора быстро изменяют на величину ΔC каждый раз, когда напряжение на нем равно нулю, а через время $\tau = 6{,}4\cdot 10^{-8}$ с возвращают в исходное состояние. Определить величину и знак ΔC.

Решение.

Чтобы менять емкость конденсатора, нужно подкачивать энергию, т. е. разводить пластины конденсатора $\Delta d > 0$. Тогда $\Delta W > 0$ и емкость уменьшается $\Delta C < 0$.

$$T = 2\pi\sqrt{LC} = 4 \cdot 10^{-6}\ \text{с}, \quad \frac{T}{4} = 10^{-6}\ \text{с} \ll \tau.$$

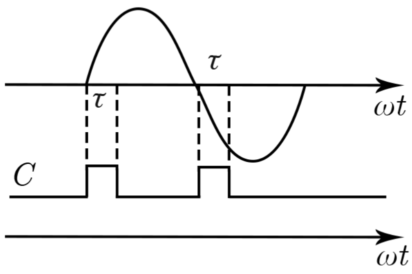

Рис. 13.14

Каждый раз, когда сигнал проходит через ноль, увеличиваем емкость, а через время τ уменьшаем.

$$\omega\tau = \frac{2\pi}{T}\tau = 0{,}1 \quad \Rightarrow \quad \sin\omega t \approx \omega t,$$

$$U(t) = U_0 \sin\omega\tau \approx U_0\omega\tau.$$

Тогда получим :

$$\Delta W = \Delta\left(\frac{q^2}{2C}\right) = -\frac{q^2}{2C^2}\Delta C = \frac{U^2}{2}\,|\Delta C| > 0 \text{ (за один раз)}.$$

$$\Delta W = 2 \cdot \frac{U_0^2\omega^2\tau^2}{2}\,|\Delta C| \geqslant \frac{1}{2}\,I_0^2 RT,$$

где ΔW — энергия, теряемая за один период.

$$\frac{CU_0^2}{2} = \frac{LI_0^2}{2}, \quad \Rightarrow \quad I_0^2 = \frac{C}{L}\,U_0^2.$$

Откуда следует:

$$U_0^2\omega^2\tau^2|\Delta C| \geqslant \frac{CU_0^2}{2L}\,RT,$$

$$\Delta C \geqslant \frac{CRT}{2L(\omega\tau)^2} = \frac{RC^2T}{2\tau^2} = 5 \cdot 10^{-12}\ \Phi.$$

$$\frac{\Delta C}{C} = \frac{5 \cdot 10^{-12}}{10^{-10}} = 0{,}05.$$