ЛЕКЦИЯ 14

УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Рассмотрим задачу из прошлой лекции на тему автоколебаний. Пусть задан колебательный контур (см. рис. 14.1).

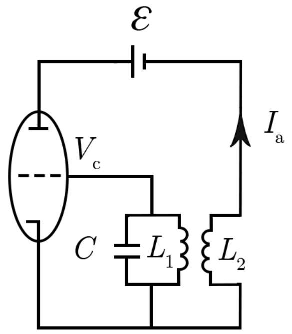

Рис. 14.1

M — коэффициент взаимной индукции. Скорость изменения анодного тока равна:

$$\frac{dI_а}{dt} = \underbrace{\frac{dI_а}{dV_c}}_{S} \frac{dV_c}{dt},$$

где S — **крутизна анодно-сеточной характеристики**, $V_с$ — напряжение на сетке. Запишем уравнение колебаний в контуре:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = -\frac{d\Phi}{dt},$$

$$MathcalE^{вз. инд} = -M\frac{dI_а}{dt} = -MS\frac{dV_c}{dt} = -\frac{MS}{c}\,\dot{q}.$$

Откуда следует:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = -\frac{MS}{c}\,\dot{q},$$

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \frac{q}{LC} = 0,$$

$$2\delta = \frac{R}{L} + \frac{MS}{CL}, \quad \omega_0 = \frac{1}{LC},$$

где δ — коэффициент затухания. Решение такого дифференциального уравнения будет следующим:

$$q(t) = q_0\, \mathrm{e}^{-\delta(t)}(A\cos\omega t + B\sin\omega t).$$

Если $\delta > 0$, то получим затухающий процесс. Однако, если $\delta < 0$, то колебания будут возрастать. Таким образом, $\delta < 0$ — **условие возникновения автоколебаний**.

$$\frac{R}{2L} + \frac{MS}{2LC} < 0, \quad \Rightarrow \quad M < \frac{CL}{S} < 0,$$

т. е. коэффициент взаимной индукции отрицательный.

Задача 11.37.

В схеме, изображенной на рис. 14.2, анодный ток $I_\text{а}$ при малых колебаниях в контур линейно зависит от напряжения на сетке V_c по закону $I_\text{а} = SV_\text{с} + I_0$, где S и I_0 — постоянные величины. Катушка колебательного контура L и катушка связи $L_\text{св}$ намотаны на общем магнитном сердечнике. Считая величины $L, L_\text{св}, C$ и S заданными, определить, при каком максимальном значении активного сопротивления R контура возможно возбуждение автоколебаний. Какова будет эффективная добротность контура, если выбрать $R = 2R_\text{max}$? Провести числовой расчет для $L = 4\cdot10^{-4}$ Г, $L_\text{св} = 4\cdot10^{-6}$ Г, $C = 10^{-8}$ Ф, $S = 2\cdot10^{-3}$ А/В.

Решение.

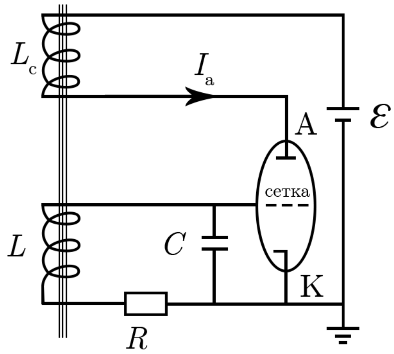

Рис. 14.2

Коэффициент взаимной индукции равен:

$$M = \sqrt{LL_\text{c}}.$$

Для того чтобы начались автоколебания необходимо:

$$R + \frac{MS}{C} < 0,$$

$$R_\text{max}\Big|_{M=\sqrt{LL_\text{c}}} = \sqrt{LL_\text{c}}\cdot\frac{S}{C} = \sqrt{4\cdot10^{-4}\cdot4\cdot10^{-6}}\cdot\frac{2\cdot10^{-3}}{10^{-8}} = 8 \text{ Ом}.$$

В отсутствии связи $R = 2R_{\max} = 16$ Ом.

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{16}\sqrt{\frac{4\cdot 10^{-4}}{10^{-8}}} = 12{,}5,$$

$$R_1 = R_{\max} + 8\text{ Ом} = 24\text{ Ом},\quad R_2 = R_{\max} - 8\text{ Ом} = 8\text{ Ом},$$

$$Q_1 = 8,\quad Q_2 = 25.$$

1. Уравнения Максвелла

В интегральной форме:

$$\oint\limits_S \vec{D}\,d\vec{S} = 4\pi\int\limits_V \rho\,dV,$$

$$\oint\limits_S \vec{B}\,d\vec{S} = 0,$$

$$\oint\limits_L \vec{E}\,d\vec{L} = -\frac{1}{c}\int\limits_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\,d\vec{S},$$

$$\oint\limits_L \vec{H}\,d\vec{L} = \frac{4\pi}{c}\int\limits_S \vec{j}\,d\vec{S}.$$

В дифференциальной форме:

$$\operatorname{div}\vec{D} = 4\pi\rho,$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0,$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}.$$

Заметим, что четвертое уравнение справедливо только для стационарных токов. Приведем примеры, когда это уравнение не выполняется.

Рассмотрим шар с зарядом q. В начальный момент времени шар был изолирован и находился в проводящей среде. Если снять изоляцию, то шар начнет разряжаться. Появятся токи в соответствии с направлением электрического поля.

Исходя из симметрии, магнитное поле вокруг шара будет равно нулю. Чтобы объяснить этот эффект, Максвелл предложил вести ток, который направлен к шару и распределен радиально. По величине этот ток равен току j. Такой ток был назван **током смещения**.

$$j + j_{\text{см}} = 0.$$

Рассмотрим схему, изображенную на рисунке 14.4.

Если замкнуть цепь, то конденсатор начнет разряжаться. Процесс будет нестационарным. Рассмотрим некоторый контур L. Ток i будет пересекать поверхность S, натянутую на этот контур. Однако поверхность S можно и разместить по-другому (S_1).

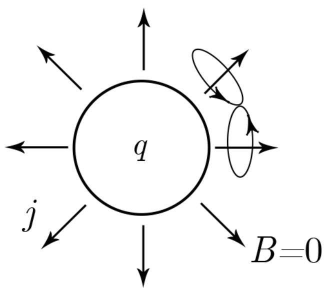

Рис. 14.3

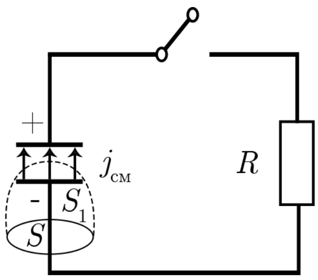

Рис. 14.4

Уравнение должно выполняться в обоих случаях. Но внутри конденсатора тока нет. Максвелл предложил ввести некоторый фиктивный ток, который он назвал **током смещения**. По величине ток смещения равен току, который течет в контуре. Чтобы ввести ток смещения, рассмотрим уравнение непрерывности.

$$\operatorname{div}\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

$$\operatorname{div}\vec{D} = 4\pi\rho \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{1}{4\pi}\operatorname{div}\vec{D}.$$

Тогда

$$\dot{\rho} = \frac{1}{4\pi}\operatorname{div}\dot{\vec{D}},$$

$$\operatorname{div}(\vec{j} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}) = 0,$$

$$j_{\text{см}} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}.$$

Тогда получим:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}(\vec{j} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}),$$

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{H} = (\vec{\nabla}, [\vec{\nabla}, \vec{H}]) = \frac{4\pi}{c}\operatorname{div}(\vec{j} + \frac{1}{4\pi}\dot{\vec{D}}).$$

Переменное электрическое поле является источником магнитного поля. Запишем последнее уравнение Максвелла в виде:

$$\oint\limits_L \vec{H}\,d\vec{l} = \frac{4\pi}{c}\int\limits_S (\vec{j} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t})\,d\vec{S}, \quad \operatorname{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}.$$

Также необходимо помнить про граничные условия и материальные уравнения:

$$j = \lambda E, \quad D = \epsilon E, \quad B = MuH.$$

1.1. Теорема Пойнтинга

Плотность электромагнитной энергии:

$$w = \frac{1}{8\pi}(\epsilon E^2 + MuH^2), \quad w = \left[\frac{\text{эрг}}{\text{см}^2}\right].$$

Тогда

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}(\epsilon \vec{E}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + Mu\vec{H}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}) = \frac{1}{4\pi}(\vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}).$$

Используя уравнение Максвелла, получим

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\vec{j}\vec{E} + \frac{c}{4\pi}(\underbrace{\vec{E}\,\mathrm{rot}\,\vec{H}}_{-\,\mathrm{div}[\vec{E},\vec{H}]} - \vec{H}\,\mathrm{rot}\,\vec{E}),$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\vec{j}\vec{E} + \frac{c}{4\pi}\,\mathrm{div}[\vec{E},\vec{H}].$$

Возьмем интеграл от этой величины по объему V. Используя теорему Гаусса, получим:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\int\limits_V \vec{j}\vec{E}\,dV - \frac{c}{4\pi}\oint\limits_\sigma [\vec{E},\vec{H}]\,d\sigma.$$

Пусть поверхность σ охватывает все электрическое и магнитное поле.

$$\oint\limits_\sigma [\vec{E},\vec{H}]\,d\sigma = 0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\int\limits_V \vec{j}\vec{E}\,dV.$$

Из закона Ома получим:

$$j = \lambda(E + E^{\text{стор}}), \quad \Rightarrow \quad E = \frac{j}{\lambda} - E^{\text{стор}}.$$

Откуда следует

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \underbrace{\int\limits_V \vec{j}\vec{E}^{\text{стор}}\,dV}_{P} - \underbrace{\int\limits_V \frac{j^2}{\lambda}\,dV}_{Q},$$

где P — мощность источников энергии, Q — потери энергии. Окончательно получим:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = P - Q - \int\limits_\sigma \vec{S}\,\vec{\sigma}, \quad \vec{S} = \frac{c}{4\pi}[\vec{E},\vec{H}],$$

где $\vec{S}$ — **вектор Пойнтинга**.

Если поверхность не охватывает все поле, то энергия может выходить за пределы поверхности в виде потока электромагнитной энергии.

$$\frac{\partial W}{\partial t} + (Q - P) = \frac{\partial U}{\partial t} = \int\limits_{\sigma} \vec{S}\, d\sigma,$$

где U — внутренняя энергия среды. Тогда получим:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{S} = 0.$$

Это уравнение носит название теоремы Умова–Пойнтинга.

Задача 12.5.

Заряженный и отключенный от источника электричества плоский конденсатор, состоящий из двух одинаковых дисков радиусом R, пробивается электрической искрой вдоль своей оси. Считая разряд квазистационарным и пренебрегая краевыми эффектами, вычислить мгновенное значение напряженности магнитного поля H внутри конденсатора (в зависимости от расстояния r до его оси), если сила тока в электрической искре в рассматриваемый момент времени равна I.

Решение.

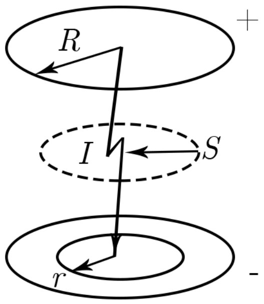

Рис. 14.5

$$I = \frac{dQ}{dt}.$$

Ток смещения равен:

$$I_{\text{см}} = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{S} \frac{\partial D}{dt}\, d\vec{S} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial}{\partial t}(4\pi\sigma)\, dS = \frac{dQ}{dt},$$

$$I + I_{\text{см}} = 0.$$

При $r < R$

$$i_{\text{см}}(r) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\pi r^2} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\, dS = -I\frac{r^2}{R^2}.$$

По теореме о циркуляции получим:

$$\oint\limits_{r<R} \vec{H}\, d\vec{l} = 2\pi r H = \frac{4\pi}{c}(I + i_{\text{см}}(r)) \quad \Rightarrow \quad H = \frac{2I}{cr}(1 - \frac{r^2}{R^2}).$$

При $r = R$ поле равно нулю. Значит, поле вне конденсатора отсутствует и на границе равно нулю. Ток смещения, который является объемным током переменного поля, компенсирует «истинный» ток I только в пределах конденсатора.

Найдем вектор Пойнтинга $\vec{S}$.

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}[\vec{E}, \vec{H}].$$

Выберем внутри конденсатора некоторый контур. Поле E направлено вниз. Поле H направлено по касательной к контуру. Значит, вектор $\vec{S}$ направлен к центру, т. е. в сторону искры, где происходит выделение энергии.

$$E = 4\pi\sigma,$$

$$S = \frac{c}{4\pi}EH = \frac{c}{4\pi}\,4\pi\sigma\frac{2I}{cr}(1 - \frac{r^2}{R^2}) = \frac{2I\sigma}{r}(1 - \frac{r^2}{R^2}),$$

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = S2\pi r d = \frac{2I\sigma}{r}\,2\pi r d(1 - \frac{r^2}{R^2}) = 4\pi I\sigma d(1 - \frac{r^2}{R^2}),$$

где d — расстояние между пластинами конденсатора.

$$\sigma = \frac{q}{S} = \frac{VC}{S} = \frac{V}{S}\frac{S}{4\pi d}.$$

Откуда следует

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = 4\pi I\frac{V}{4\pi d}d(1 - \frac{r^2}{R^2}) = IV(1 - \frac{r^2}{R^2}).$$

Задача.

На гладком столе лежит диэлектрическое кольцо массой m на котором распределен заряд Q. Кольцо находится во внешнем однородном электромагнитном поле B_0, перпендикулярном плоскости кольца. Найти угловую скорость ω кольца, приобретенную им после выключения магнитного поля.

Решение.

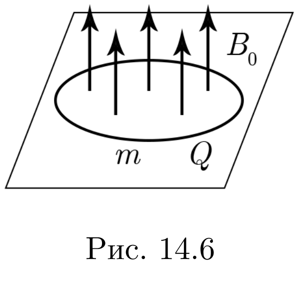

Рис. 14.6

Переменное магнитное поле является источником вихревого электрического поля. Силовые линии замкнуты. Из уравнения Максвелла

$$\oint\limits_L \vec{E}d\vec{l} = 2\pi r\vec{E} = \frac{1}{c}\int \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\, dS,$$

где в качестве L возьмем кольцо радиусом r.

$$E2\pi r = -\frac{\pi r^2}{c}\frac{\partial B}{\partial t},$$

$$E(r) = -\frac{r}{2c}\frac{\partial B}{\partial t}.$$

Поле направлено вдоль по окружности и действует на заряды. Поэтому появляется момент силы, поворачивающий кольцо.

$$dF = dqE, \quad dM = rdF = rdqE,$$

$$dM = -\frac{r^2}{2c}dq\frac{\partial B}{dt},$$

$$M = -\frac{r^2}{2c}Q\frac{\partial B}{dt} = \frac{\partial L}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = mr^2\frac{d\omega}{dt}.$$

Откуда следует

$$d\omega = -\frac{Q}{2mc}\,dB \quad \Rightarrow \quad \int\limits_0^\omega d\omega = -\frac{Q}{2mc}\int\limits_{B_0}^0 dB,$$

$$\omega = \frac{Q}{2mc}B_0.$$

Задача 12.27.

Постоянный ток I течет по цепи, состоящей из резистора сопротивлением R, длинной катушки радиусом r_2 и плотностью намотки витков n [см$^{-1}$] и соосного с катушкой прямого провода радиусом r_1 (см. рис. 14.7). Пренебрегая сопротивлением катушки и провода, найти аксиальную S_z и азимутальную S_ϕ компоненты вектора Пойнтинга внутри катушки вдали от ее торцов. Вычислить поток энергии через сечение катушки.

Решение.

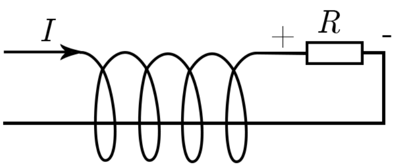

Рис. 14.7

Между поверхностью катушки и проводом существует разность потенциалов. Значит, есть электрическое поле. Это поле будет радиальным.

$$\Delta\phi = IR.$$

По теореме Гаусса

$$2\pi rlE = 4\pi\kappa l, \quad E(r) = \frac{2\kappa}{r},$$

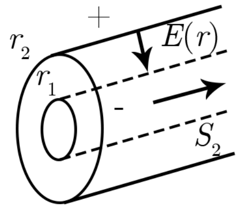

Рис. 14.8

где κ — поверхностная плотность заряда.

$$d\phi = -E(r)dr \quad \Rightarrow \quad \int\limits_{r_1}^{r_2} d\phi = \Delta\phi = IR = -\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{2\kappa}{r}\,dr = -2\kappa \ln\frac{r_2}{r_1}.$$

Откуда следует

$$2\kappa = -\frac{IR}{\ln\frac{r_2}{r_1}}, \quad E(r) = -\frac{IR}{r\ln\frac{r_2}{r_1}}.$$

Магнитное поле соленоида направлено по оси z, поле провода направлено по окружности.

$$B_z = \frac{4\pi}{c}nI = H_z,$$

$$B_\phi = \frac{2I}{cr} = H_\phi,$$

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}[\vec{E}, \vec{H}].$$

Если взять поле H, направленное по окружности, то S будет направлено по оси z.

$$|\vec{S}| = |\frac{c}{4\pi}[\vec{E}_r, \vec{H}_\phi] = \frac{c}{4\pi}\frac{IR}{r\ln\frac{r_2}{r_1}}\frac{2I}{cr} = \frac{I^2R}{2\pi r^2\ln\frac{r_2}{r_1}}.$$

$$S_\phi = \frac{c}{4\pi}EH_z = \frac{n}{r}\frac{I^2R}{\ln\frac{r_2}{r_1}}.$$

Найдем мощность потока энергии через сечение катушки.

$$W = \int\limits_{r_1}^{r_2} S_z 2\pi r\,dr = 2\pi\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{I^2R}{2\pi r^2\ln\frac{r_2}{r_1}} = \frac{I^2R}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = I^2R.$$

W — мощность, которая будет выделяться на резисторе. Туда же будет направлен и вектор $\vec{S}$.