
ЛЕКЦИЯ 15

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ. ВОЛНОВОДЫ. РЕЗОНАТОРЫ

1. Электромагнитные волны

Рассмотрим возмущение, распространяющееся по какой-то среде (например, электрический сигнал, звуковой сигнал).

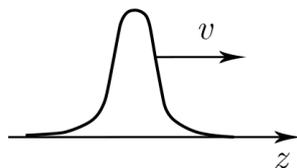


Рис. 15.1

Функция, которой описывается форма возмущения, зависит от двух переменных — координаты и времени:

$$S = S(z, t),$$

причем функция $S(z, t)$ всегда зависит от t и z следующим образом:

$$S(z, t) = S\left(t - \frac{z}{v}\right).$$

Волна с периодическим возмущением будет иметь следующую форму:

$$S(z, t) = A \cos\left(\omega\left(t - \frac{z}{v}\right)\right),$$

где $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Отношение ω и v есть **волновое число** (то есть пространственная частота):

$$\frac{\omega}{v} = k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

! Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки.
Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

2

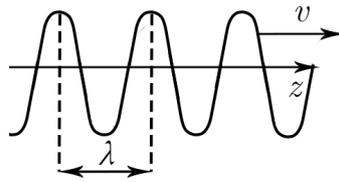


Рис. 15.2

Зафиксируем волну в произвольный момент времени:

Скорость v — **фазовая скорость**, т. е. скорость перемещения плоскости постоянной фазы.

! Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой.
Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu

! Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

Теперь рассмотрим точечный источник. Форма фронта волны точечного источника — это сфера.

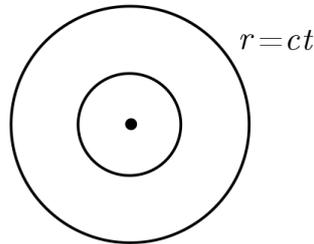


Рис. 15.3

На больших расстояниях фронт сферической волны становится **плоским**. Запишем выражение для волны напряженности электрического поля:

$$E(z, t) = E_0 e^{i(\omega t - kz)}.$$

Введем вектор k (вектор распространения волны) в общем виде:

$$\vec{k} = (k_x, k_y, k_z).$$

Плоскость волны расположена перпендикулярно \vec{k} .

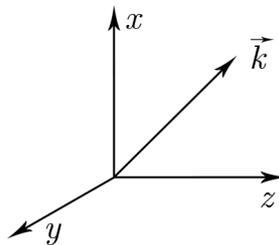


Рис. 15.4

В общем виде волну можно записать так:

$$e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}.$$

Можно получить уравнение для волны из уравнений Максвелла. Рассмотрим электромагнитную волну в пустой среде ($\rho = 0, j = 0$), обладающей диэлектрической проницаемостью ϵ и магнитной проницаемостью Mu . Тогда

$$\vec{B} = Mu\vec{H}, \quad \vec{D} = \epsilon\vec{E}.$$

Запишем уравнения Максвелла с учетом этого:

$$\text{div } \vec{E} = 0,$$

$$\text{div } \vec{B} = 0,$$

! Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= \frac{Mu\epsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Применим оператор rot к третьему уравнению:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \nabla \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\frac{1}{c} \left(\frac{Mu\epsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right).$$

Полученное уравнение называется **волновым уравнением**:

$$\Delta \vec{E} = \frac{Mu\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Для поля B получается аналогичное уравнение.

$$\Delta \vec{B} = \frac{Mu\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}.$$

Легко проверить, что введенная в начале лекции функция $S(z, t) = S\left(t - \frac{z}{v}\right)$ удовлетворяет одномерному волновому уравнению:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 S}{\partial z^2}.$$

Рассмотрим одномерное волновое уравнение для поля E :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} &= \frac{c^2}{Mu\epsilon} \frac{\partial^2 E}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} &= \frac{c^2}{Mu\epsilon} \frac{\partial^2 B}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

Вместе с уравнением для B получается система, описывающая электромагнитную волну. Рассмотрим распределение векторов B и E при фиксированном значении t . Это одна из возможных поляризаций света.

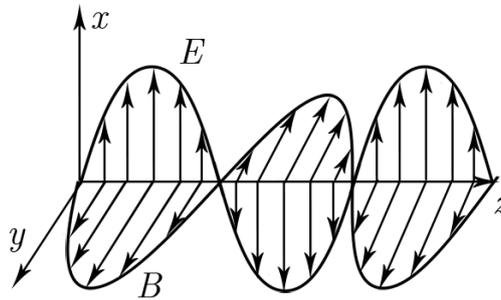


Рис. 15.5

Поле B перпендикулярно полю E ; оно направлено по оси y . Вектора k и $S = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{H}]$ направлены по оси z .

! Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

Существует всего два типа поляризации для электромагнитной волны, распространяющейся по оси z .

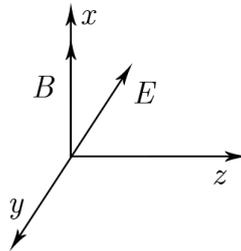


Рис. 15.6

Если подставить в волновое уравнение соответствующее решение, то получится следующее соотношение для полей B и E :

$$B_y = nE_x,$$

где n — **показатель преломления**:

$$n = \sqrt{\epsilon\mu} \approx \sqrt{\epsilon},$$

поскольку значение μ для многих прозрачных диэлектрических сред, по которым распространяются волны (например, газ или воздух), обычно очень близко к единице: $\mu \approx 1,000001$.

Выражение для фазовой скорости примет вид:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{n}.$$

При переходе из вакуума в какую-то среду волновое число меняется таким же образом, как и скорость:

$$\frac{v}{c} = \frac{1}{n} = \frac{k_{\text{вак}}}{k_{\text{сред}}} = \frac{\frac{\omega}{c}}{\frac{\omega n}{c}} = \frac{\lambda_{\text{сред}}}{\lambda_{\text{вак}}}.$$

Изменение волнового числа и длины волны:

$$k_{\text{сред}} = nk_{\text{вак}}, \quad \lambda_{\text{сред}} = \frac{\lambda}{n}.$$

! Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu



Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

2. Прямоугольный волновод

Теперь рассмотрим конфигурацию волн в ограниченном пространстве, а именно в прямоугольном волноводе. Дабы уменьшить сопротивление и повысить добротность, волноводы обычно выполняют из меди.

Изобразим срез прямоугольного волновода.

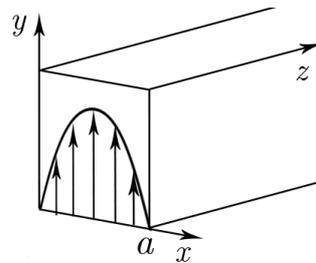


Рис. 15.7

Наложим на поле E следующее условие: $E_z = 0$. Волны с отсутствующей z -компонентой называются H -волнами.

Для напряженности электрического поля должно выполняться:

$$E_{1t} = E_{2t} = 0.$$

Соответствующая конфигурация изображена на рисунке 15.7. В рамках данной лекции ограничимся простейшей конфигурацией поля E , хотя возможны и более сложные:

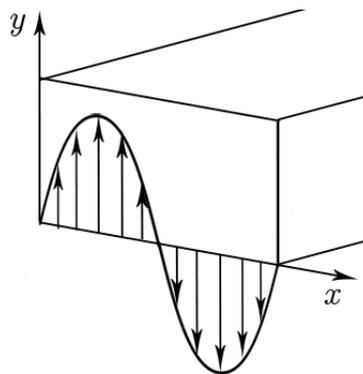


Рис. 15.8

Граничные условия для поля E :

$$E|_{x=0} = E|_{x=a} = 0.$$

Следующее решение является подходящим:

$$E_y = E_0 \sin k_x x e^{i(\omega t - k_z z)} \text{ — } H_{10}\text{-волна.}$$



Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu

! Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

Проверим это, подставив решение в уравнения Максвелла:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -k_x^2 E_y, \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = -k_z^2 E_y, \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = -\omega^2 E_y.$$

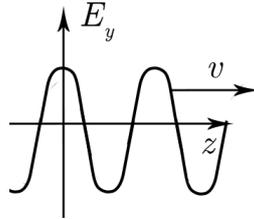


Рис. 15.9

Поскольку

$$\Delta E = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2},$$

то

$$k_x^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad \text{— закон дисперсии.}$$

Закон дисперсии в свободном пространстве:

$$\omega = kc = \frac{2\pi c}{\lambda}.$$

Итак,

$$k_z = \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}}.$$

Волна возможна, если значение ω превышает значение $\omega_{\text{кр}}$:

$$\omega > \frac{\pi c}{a} = \omega_{\text{кр}}.$$

$$\lambda_{\text{волновод}} = \frac{2\pi}{k_z} = \frac{2\pi}{\frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\pi c}{a\omega}\right)^2}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{2\pi c}{2a\omega}\right)^2}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}.$$

Волна возможна, если $\lambda < \lambda_{\text{кр}} = 2a$.

Выражение для фазовой скорости:

$$v_{\text{фаз}} = \frac{\omega}{k_z} = \frac{\omega}{\frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\pi^2}{a^2}}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_{\text{кр}}^2}}}.$$

Фазовая скорость превышает скорость света. Здесь нет противоречия: фазовая скорость — это скорость перемещения плоскости постоянной фазы; она не несет в себе

! Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu



Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

никакой информации. Информация распространяется со скоростью, называемой **групповой**:

$$u_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk}.$$

При модуляции волны возникает спектр: вся волна не будет распространяться с одной и той же скоростью.

Закон дисперсии:

$$\omega^2 = c^2(k_x^2 + k_z^2).$$

Продифференцируем:

$$2\omega d\omega = 2c^2 k_z dk_z,$$

$$\frac{\omega}{d} \frac{d\omega}{dk_z} = c^2 \Rightarrow \boxed{vu = c^2}$$

— выполняется в плазме и волноводе.

Поскольку $vu = c^2$, то

$$u = \frac{c^2}{v} = c \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_{\text{кр}}^2}} < c.$$

3. Резонатор

Рассмотрим резонатор в виде прямоугольного параллелепипеда (такие резонаторы часто заменяют колебательные контуры):

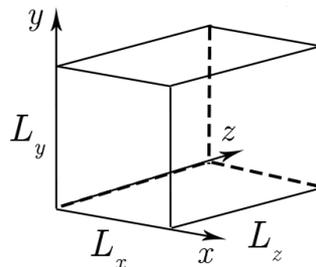


Рис. 15.10

Запишем уравнения Максвелла:

$$\text{rot } \vec{E} = -i \frac{\omega}{c} \vec{B}, \quad \text{rot } \vec{B} = i \frac{\omega \epsilon}{c} \vec{E}.$$

Для поля E внутри прямоугольного резонатора получается следующее уравнение:

$$\Delta \vec{E} + \frac{\omega^2 \epsilon}{c^2} \vec{E} = 0. \quad (15.1)$$

Подберем минимальную резонансную частоту при заданных параметрах (**основную моду**).

Решения для дифференциального уравнения 15.1:

$$E_x = E_{x0} \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z e^{i\omega t},$$



Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu

! Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

$$E_y = E_{y0} \sin k_x x \cos k_y y \sin k_z z e^{i\omega t},$$

$$E_z = E_{z0} \sin k_x x \sin k_y y \cos k_z z e^{i\omega t}.$$

Граничные условия: поле E должно быть равно нулю на границах, если E параллельно или перпендикулярно границам (т. е. не должно быть тангенциальных компонент). Значит,

$$\begin{cases} k_x L_x = \pi l, \\ k_y L_y = \pi m, \\ k_z L_z = \pi n, \end{cases}$$

где l, m, n — целые числа: $l, m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, причем из этих чисел только одно может равняться нулю.

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \frac{\omega \sqrt{\epsilon}}{c}.$$

Допустим, $L_x < L_y < L_z$. Найдем ω_{\min} . Поскольку

$$\frac{\omega \sqrt{\epsilon}}{c} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{L_x}\right)^2 l^2 + \left(\frac{\pi}{L_y}\right)^2 m^2 + \left(\frac{\pi}{L_z}\right)^2 n^2},$$

то

$$\omega_{\min} = \omega_{011} = \frac{c}{\epsilon} \sqrt{\left(\frac{\pi}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{L_z}\right)^2}.$$

Соответствующая конфигурация поля:

$$E_x = E_{x0} \cos 0 \sin\left(\frac{\pi}{L_y}\right) y \sin\left(\frac{\pi}{L_z}\right) z e^{i\omega t},$$

$$E_y = 0,$$

$$E_z = 0.$$

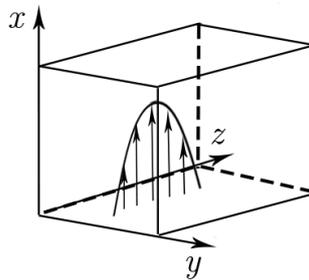


Рис. 15.11

Задача 12.48.

Генератор электромагнитного излучения длиной волны $\lambda = 8$ мм мощностью $N = 1$ МВт настроен на основную моду прямоугольного резонатора объемом $V = 0,8$ см³ и добротностью $Q = 1000$. Система соединения генератора и резонатора обеспечивает

! Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu

полное поглощение энергии генератора внутри резонатора. Определить максимальную напряженность E_{\max} электрического поля в резонаторе.

Решение.

Выражение для добротности:

$$Q = \omega \frac{W_{\text{рез}}}{N} \Rightarrow W_{\text{рез}} = \frac{QN}{\omega} = \frac{QN\lambda}{2\pi c},$$

где $W_{\text{рез}}$ — максимальная энергия в резонаторе.

Пусть для размеров резонатора справедливо соотношение:

$$a < b < c.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \omega_{\min} &= \omega_{011}, \\ k_x &= \frac{\pi}{a}n_1 = 0, \quad k_y = \frac{\pi}{b}, \quad k_z = \frac{\pi}{c}. \\ E_x &= E_m \sin\left(\frac{\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{\pi}{c}z\right) e^{i\omega t}. \end{aligned}$$

Максимальная энергия в резонаторе:

$$W_{\text{рез}} = 2 \frac{\overline{E}^2}{8\pi} V.$$

В этом выражении множитель, равный двум, появляется из-за того, что поля E и B дают одинаковый вклад в плотность энергии.

Поскольку $\overline{\sin^2 x} = \frac{1}{2}$, то при усреднении по координатам и времени функции E_x получится:

$$\overline{E}^2 = E_m^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{E_m^2}{8}.$$

$$W_{\text{рез}} = \frac{1}{8} \frac{E_m^2}{8\pi} 2V,$$

$$E_m^2 = \frac{32\pi QN\lambda}{V 2\pi c}, \quad E_m = \sqrt{\frac{16QN\lambda}{Vc}} = 4,6 \text{ ед. СГСЭ.}$$

Задача 12.43.

Отрезок коаксиального кабеля длиной $l = 14$ м подключен ко входу усилителя с большим сопротивлением, другой конец замкнут накоротко. Диэлектрическая проницаемость $\epsilon = 2$, удельная проводимость $\sigma = 0,9 \cdot 10^4$ ед. СГСЭ. Найти добротность Q резонатора, эквивалентного отрезку этого кабеля. Определить наименьшую резонансную частоту ν_{\min} . Считать, что потери связаны только с проводимостью диэлектрика.

Решение.

В кабель может вписаться четверть длины волны напряжения. Значит, максимальная длина волны

$$\lambda_{\max} = 4l = 56 \text{ м.}$$

11 ! Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

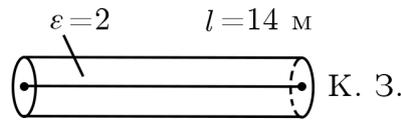


Рис. 15.12

Добротность резонатора:

$$Q = 2\pi \frac{W_{\max}}{W_{\text{пот}}}.$$

Средняя энергия за период:

$$W_E = \frac{1}{T} \int_0^T dt \iiint_V \frac{\epsilon E^2}{8\pi} dV = \frac{1}{2} W_{\max}.$$

Потенциальная энергия:

$$W_{\text{пот}} = \frac{1}{T} \int_0^T dt \iiint_V \sigma E^2 dV.$$

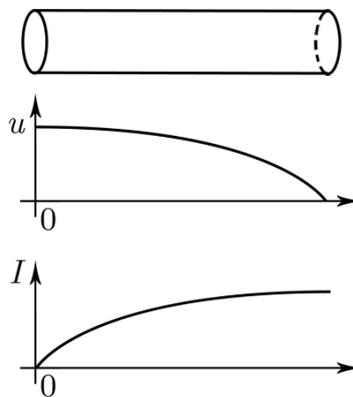


Рис. 15.13

$$Q = 2\pi \frac{\frac{2\epsilon}{8\pi T} \int_0^T dt \iiint_V E^2 dV}{\sigma \int_0^T dt \iiint_V E^2 dV} = \frac{\epsilon}{2T\sigma}.$$

Частота:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{c}{n\lambda} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}\lambda} = \frac{3 \cdot 10^{10}}{\sqrt{2} \cdot 56 \cdot 10} = 3,75 \text{ МГц.}$$

$$Q = \frac{\epsilon}{2T\sigma} = 400.$$

! Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu



Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

Задача 12.46.

В волноводе квадратного сечения со стороной $a = 5$ см распространяется волна

$$E_x = E_0 \cos 2\pi\nu_0 t,$$

$n\nu_0 = 2995$ МГц. С какой минимальной частотой амплитудной модуляции ν_{\min} в волноводе возникнет бегущая волна? Рассчитать фазовую скорость $v_{\text{фаз}}$. Частота модуляции: $\nu = 5$ МГц.

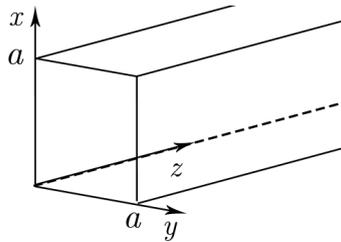


Рис. 15.14



Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu

! Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

Решение.

При амплитудной модуляции возникает спектр:

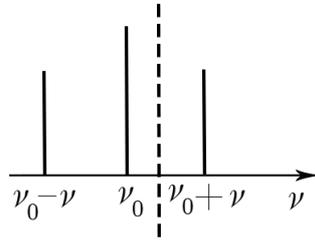


Рис. 15.15

Рассчитаем критическую частоту:

$$\nu_{\text{кр}} = \frac{\omega_{\text{кр}}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{\pi c}{a} = \frac{2,998 \cdot 10^{10}}{2 \cdot 5} = 2998 \text{ МГц.}$$

В волновод не пройдут частоты $\nu < \nu_{\text{кр}}$. Значит, $\nu_{\text{мин}} = \nu_0 + \nu = 3000 \text{ МГц}$.
Фазовая скорость:

$$v_{\text{фаз}} = \frac{\omega_{\text{бок}}}{k_z} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_{\text{кр}}^2}}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{2995^2}{3000^2}}} = 27,4 \text{ с.}$$

Задача (аналог 12.52).

СВЧ-генератор мощностью $N = 100 \text{ кВт}$ через волновод питает подающую антенну. Если волновод и антенна не будут согласованы, то волна отразится, и возникнет стоячая волна (суперпозиция прямой и отраженной волн). Найти мощность излучателя, если коэффициент стоячей волны $k = 2$.

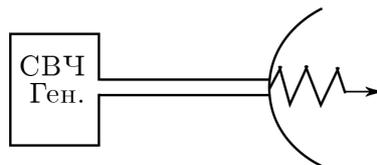


Рис. 15.16

Решение.

Пучность волны:

$$E_{\text{max}} = E_{\text{пад}} + E_{\text{отр.}}$$

Узел волны:

$$E_{\text{min}} = E_{\text{пад}} - E_{\text{отр.}}$$

Коэффициент стоячей волны:

$$k = \frac{E_{\text{max}}}{E_{\text{min}}}$$

! Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu

Коэффициент отражения:

$$r = \frac{E_{\text{отр}}}{E_{\text{пад}}}.$$

Нетрудно получить следующие соотношения для этих коэффициентов:

$$k = \frac{1+r}{1-r}, \quad r = \frac{k-1}{k+1}.$$

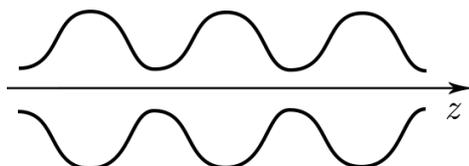


Рис. 15.17

Коэффициент отражения по энергии:

$$R = r^2 = \left(\frac{k-1}{k+1}\right)^2 = \frac{1}{9} = \frac{N_0 - N_{\text{изл}}}{N_0}.$$

$$N_{\text{изл}} = \frac{8}{9}N_0 = 88,9 \text{ кВт.}$$