ЛЕКЦИЯ 3

СИЛОВЫЕ ПОЛЯ. ПОТЕНЦИАЛ. ТВЕРДОЕ ТЕЛО. ЦЕНТР МАСС И ЦЕНТР ИНЕРЦИИ. МОМЕНТ СИЛ

1. Кинетическая энергия

Элементарную работу можно представить как:

$$\delta A = (\vec{F} d\vec{S}) = (\frac{d\vec{p}}{dt} d\vec{S}) = (\vec{p} d\vec{V}) = m(\vec{V} d\vec{V}) = m(V dV).$$

Примечание: в последнем равенстве под V подразумевается абсолютная скорость.

$$V^2 = \vec{V}\vec{V}.$$

Запишем формулу элементарной работы:

$$\delta A = \frac{m}{2}(dV^2) = d\frac{mV^2}{2} = dK,$$

где K — **кинетическая энергия**.
Таким образом, работа силы уходит на приращение кинетической энергии.

2. Силовые поля

В природе существуют так называемые «силовые поля». На материальную точку, помещенную в область действия данного поля, всегда действует какая-то сила. К силовым полям, прежде всего, относится гравитационное поле.

Если силы определяются только координатами и временем, значит эти силы появляются только в области действия силовых полей. Если поле зависит от времени, оно называется **нестационарным**. Если же поле определяется только координатами, оно называется **стационарным**. Поле **потенциально**, если существует функция $\Pi(x, y, z)$ такая, что:

$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}.$$

Стационарное поле также называют **консервативным**, если выполняется закон сохранения энергии.

Примечание. Полный дифференциал:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

3. Работа потенциальных сил

Точка A движется в поле действия потенциальных сил из точки 1 с координатами (X_1, Y_1, Z_1) в точку 2 с координатами (X_2, Y_2, Z_2) (см. рис. **??**). Определим работу сил на этом пути.

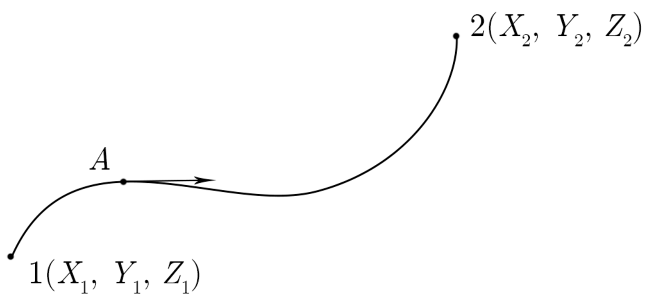

Рис. 3.1

$$A = \int\limits_1^2 (\vec{F} d\vec{S}) = \int\limits_1^2 (F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz) = -\int\limits_1^2 (\frac{\partial \Pi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z} dz) = -\int\limits_1^2 (d\Pi) = \Pi_1 - \Pi_2$$

Работа — это изменение потенциальной энергии. Она не зависит от формы пути. Это справедливо тогда и только тогда, когда поле сил потенциально и консервативно одновременно.

4. Потенциал. Поле центральных сил

Потенциал Φ — это функция Π, отнесенная к единице массы.

$$\Phi = \Pi\big|_{m=1}$$

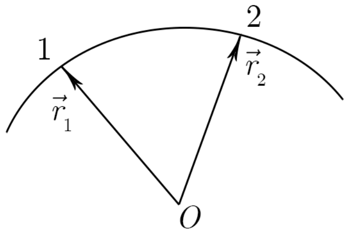

Рис. 3.2

Примером потенциального поля является поле центральных сил. **Центральная сила** — это сила, которая направлена по прямой, соединяющей взаимодействующие точки. А поле, создаваемое такими силами, называют центральным.

Примером подобного движения является движение планеты Земля вокруг Солнца или движение кометы, которая движется вокруг Солнца по эллиптической орбите (см. рис. 3.2).

Изобразим силы взаимодействия на рис. **??** и 3.3.

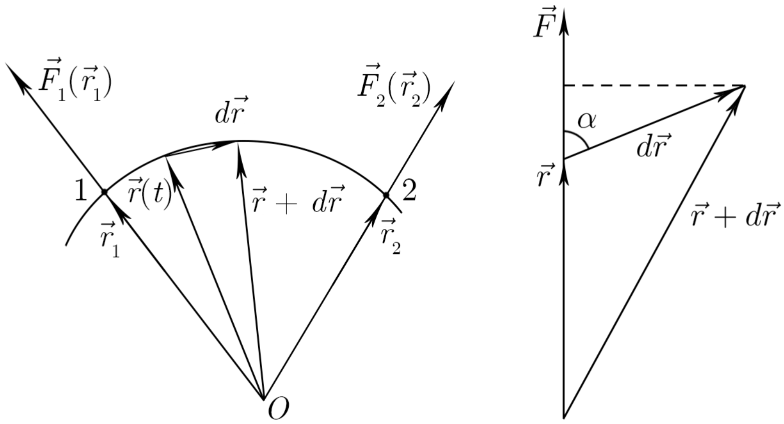

Рис. 3.3

Получаем формулы, рассмотренные в начале лекции:

$$\delta A = (\vec F d\vec S) = (\vec F d\vec r) = |\vec F||d\vec r| \cos\widehat{(\vec F d\vec r)} = F dr$$

$$A = \int\limits_1^2 F(r)\,dr = -\int\limits_1^2 d\Pi = \Pi_1 - \Pi_2$$

Это справедливо не только для 2-х взаимодействующих точек, но и для системы, взаимодействующих точек.

В поле центральных сил могут существовать **финитные** (конечные) или **инфинитные** (бесконечные) движения.

Рассмотрим взаимодействие гравитирующих масс, т. е. двух масс, которые притягиваются друг к другу.

$$\Pi(r) = \frac{A}{r^{12}} - \frac{B}{r^6}$$

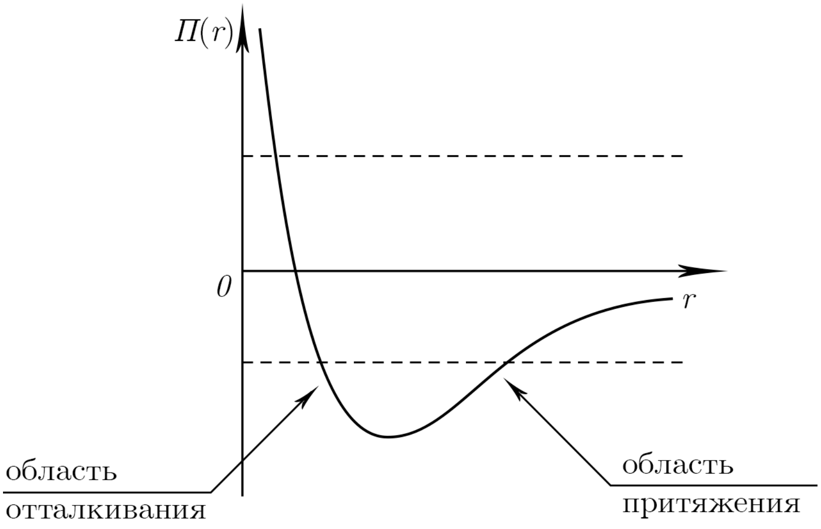

Рис. 3.4

Потенциал Леннарда–Джонса представляет зависимость потенциальной энергии взаимодействия двух молекул или специально приведенный потенциал в гравитационном поле (см. рис. 3.4).

1. $E > 0$ — инфинитное движение.

   Допустим, в точке Oрасполагается Солнце, и при $r = \infty$ существует какое-то космическое тело, у которого полная энергия равна кинетической:

   $$E = K$$

   При уменьшении r (т. е. при приближении к точке O) тело подходит к самой ближней точке (точка пересечения) и разворачивается. Такая траектория космического тела называется **гиперболической**. У такой траектории существуют только асимптоты.

2. $E < 0$ — финитное движение.

   В этом случае существуют две точки разворота. Т. е. траектория представляет собой замкнутую кривую. Примером такого движения является любой спутник, который движется по эллипсу или по кругу.

Рассмотрим пример другого консервативного поля: обычная пружина жесткости k, прикрепленная к какой-нибудь материальной точке массой m (см. рис. 3.5).

Если предварительно натянуть пружинку и отпустить, то потенциальная энергия в этом случае будет меняться, как показано на рисунке 3.6.

В данном случае, как видно из рисунка, $E > 0$ всегда. В зависимости от положения материальной точки относительно положения равновесия кинетическая энергия переходит в потенциальную и обратно. В крайних точках:

$$K = 0, \quad \Pi = max, \quad E = \Pi.$$

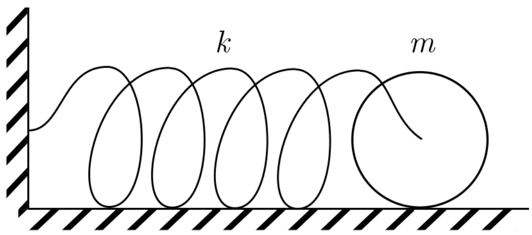

Рис. 3.5

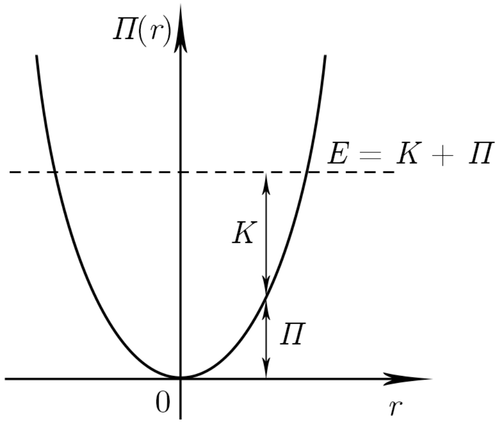

Рис. 3.6

По центру (положение равновесия):

$$K = max, \quad \Pi = 0, \quad E = K.$$

Рассчитаем потенциальную энергию:

$$F = -kx, \quad \Pi = -\int F\,dx = \int_1^2 kx\,dx = \frac{k(x_2^2 - x_1^2)}{2}$$

5. Система материальных точек

Движение **твердого тела** представляет собой частный случай движения системы материальных точек, т. к. расстояние между материальными точками, из которых состоит твердое тело, строго фиксировано.

Рассмотрим замкнутую систему взаимодействующих материальных точек (см. рис. 3.7).

$$R = \sum_i \vec{F}_{\text{i}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\text{внеш}} + \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\text{внут}}$$

$F^{\text{внеш}}$ — это силы действующие на систему со стороны поля сил, в котором она расположена.

$F^{\text{внут}}$ — это внутренние силы взаимодействия частиц. Они все являются парными.

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\text{внут}} = 0$$

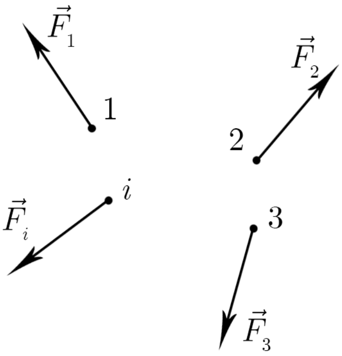

Рис. 3.7

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\text{внеш}} \text{ — определение } R \text{ — главного вектора всех сил}$$

6. Центр масс системы

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M}, \quad \text{где } M = \sum_i m_i \text{ — полная масса системы.}$$

$$\vec{V}_c = \frac{\sum_i m_i \vec{V}_i}{M}$$

$$\ddot{\vec{r}}_c = \frac{\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i}{M} = \frac{\vec{R}}{M}$$

7. Момент силы

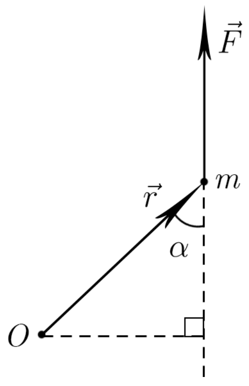

Рис. 3.8

На рис. 3.8 изображён момент силы $\vec{M}$. Модуль его равен

$$M = Fr \sin\alpha,$$

где $r \sin\alpha$ — **плечо силы**.

Плечо силы — это кратчайшее расстояние до линии действия силы.
Вектор момента силы:

$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}]$$

Рассмотрим систему из двух взаимодействующих материальных точек (см. рис. 3.9).

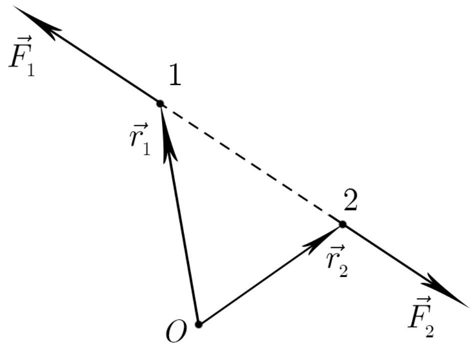

Рис. 3.9

Суммарный момент силы относительно точки O:

$$\vec{M}_0 = [\vec{r}_1\vec{F}_1] + [\vec{r}_2\vec{F}_2] = [\vec{r}_1\vec{F}_1]_[\vec{r}_2\vec{F}_1] = [(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\vec{F}_1] = 0$$

Исходя из полученной формулы, суммарный момент внутренних сил в замкнутой системе равен нулю.

$$\vec{M} = \sum_i [\vec{r}_i\vec{F}_i] = \sum_i [\vec{r}_i\vec{F}_i^{\text{внеш}}] + \sum_i [\vec{r}_i\vec{F}_i^{\text{внут}}] = \sum_i [\vec{r}_i\vec{F}_i^{\text{внеш}}]$$

M — главный момент всех сил, которые действуют в этой системе.
Для замкнутой системы в системе центра инерции (СЦИ):

$$\vec{p} = m\vec{V}_c = \sum_i m_i\vec{V}_i = 0$$

8. Момент импульса

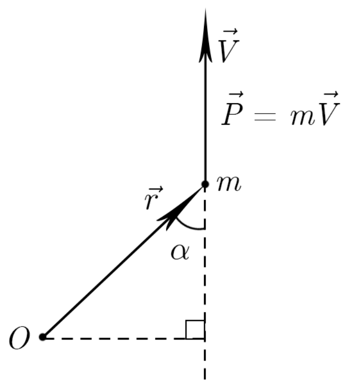

Рис. 3.10

На рис. 3.10 показан $\vec{L}$ — момент импульса материальной точки относительно полюса.

$$\vec{L} = [\vec{r}m\vec{V}].$$

Рассмотрим задачу нахождения момента импульса материальной точки относительно движущегося полюса (см. рис. 3.11).

O — центр неподвижной системы координат, A — подвижный полюс, m_i — материальная точка.

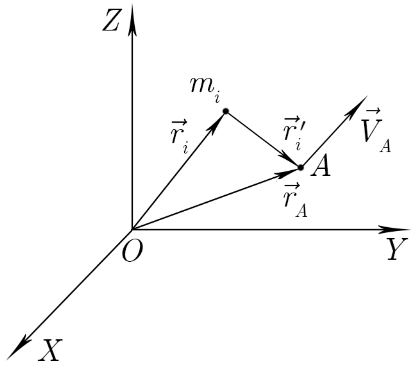

Рис. 3.11

$$\vec{r}\,'_i = \vec{r}_i - \vec{r}_A, \quad \dot{\vec{r}}_i = \vec{V}_i, \quad \dot{\vec{r}}\,'_i = \vec{V}_{\text{i отн A}}, \quad \dot{\vec{r}}_A = \vec{V}_A$$

$$\vec{V}_{\text{i отн A}} = \vec{V} - \vec{V}_A$$

$$\vec{L}_A = \sum_i [\vec{r}_i m_i \vec{V}_i], \quad \frac{d\vec{L}_A}{dt} = \sum_i [\dot{\vec{r}}_i m_i \vec{V}_i] + \sum_i [\vec{r}_i m_i \dot{\vec{V}}_i]$$

$$m_i \dot{\vec{V}}_i = \vec{F}_i, \quad \sum_i [\vec{r}\,'_i \vec{F}] = \vec{M}_A$$

$$\sum_i [\vec{r}\,'_i \vec{F}] = \vec{M}_A, \quad \sum_i [\dot{\vec{r}}\,'_i m_i \vec{V}_i] = \sum_i [\vec{V}_i m_i \vec{V}_i] - \sum_i [\vec{V}_A m_i \vec{V}_i]$$

$$\sum_i [\vec{V}_i m_i \vec{V}_i] = 0, \quad M\vec{V}_c = \sum_i m_i \vec{V}_i$$

$$\vec{L}_A = \sum_i [\vec{r}\,'_i m_i \vec{V}_i], \quad \frac{d\vec{L}_A}{dt} = \sum_i [\dot{\vec{r}}\,'_i m_i \vec{V}_i] + \sum_i [\vec{r}\,'_i m_i \dot{\vec{V}}_i]$$

$$\sum_i [\dot{\vec{r}}\,'_i m_i \vec{V}_i] = -\sum_i [\vec{V}_A m_i \vec{V}_i] = -[\vec{V}_A M \vec{V}_c] = -M[\vec{V}_A \vec{V}_c]$$

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_A^{\text{внеш}} - M[\vec{V}_A \vec{V}_c]$$

Рассмотрим два частных случая:

1. A=C $\quad\Rightarrow\quad \frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_A^{\text{внеш}}$
2. $\vec{V}_A \parallel \vec{V}_c \quad\Rightarrow\quad \frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_A^{\text{внеш}}$