ЛЕКЦИЯ 4

ТЕОРЕМА КЁНИГА. АБСОЛЮТНО УПРУГИЙ УДАР. НЕУПРУГИЙ УДАР. ПОРОГОВАЯ ЭНЕРГИЯ. СТО

1. Теорема Кёнига

В прошлый раз мы рассматривали систему материальных точек и нашли закон изменения момента импульса относительно движущегося полюса. Теперь мы рассмотрим туже самую систему материальных точек в системе координат OXYZ и пусть есть еще одна система отсчета с началом координат в точке A (см. рис. 4.1).

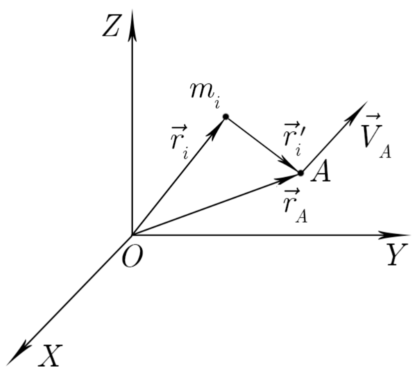

Рис. 4.1

$$\vec{V}_A = \frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}, \qquad \dot{\vec{r}}_i = \vec{V}_i, \qquad \dot{\vec{r}}_i' = \vec{V}_{\text{i отн}}, \qquad \vec{V}_i = \vec{V}_A + \vec{V}_{\text{i отн}}$$

Кинетическая энергия этой системы точек

$$K = \frac{\sum_i m_i V_i^2}{2}.$$

Очень важно уметь записывать кинетическую энергию системы материальных точек относительно движущегося полюса A. Очевидно, что кинетическая энергия не зависит от выбранной системы отсчета.

$$K = \frac{\sum_i m_i V_i^2}{2} = \frac{1}{2}\sum_i m_i V_A^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i V_{\text{i отн}}^2 + \sum_i m_i(\vec{V}_A \vec{V}_{\text{i отн}}^2).$$

Запишем последнее слагаемое, используя скорость центра масс системы материальных точек

$$\vec{V}_c = \frac{\sum_i m_i \vec{V}_i}{M},$$

$$\sum_i m_i V_A V_{\text{i отн}} = M(\vec{V}_A \vec{V}_{cотн}),$$

$$K = \frac{MV_A^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_i m_i V_{\text{i отн}}^2 + M(\vec{V}_A \vec{V}_{\text{i отн}}).$$

Если точка A является центром инерции, то

$$K = \frac{MV_c^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_i m_i V_{\text{i отн}}^2.$$

Кинетическая энергия системы материальных точек является суммой кинетических энергий центра масс этой системы и относительного движения системы относительно центра масс.

Примечание. *Эта теорема очень важна при рассмотрении движения твердого тела, в котором материальные точки соединены между собой определенным образом. В этом случае, второе слагаемое будет являться кинетической энергией вращательного движения относительно центра масс.*

Если ко второму слагаемому добавить потенциальную энергию взаимодействия частиц, то мы получим внутреннюю энергию системы.

2. Соударения

2.1. Абсолютно упругий удар

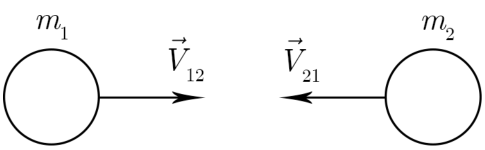

Рис. 4.2

Рассмотрим столкновение двух шариков массой m_1 и m_2 (см. рис. 4.2). Так как система одномерная, то формулы будем записывать в скалярном виде.

Для заданной системы запишем закон сохранения импульса

$$m_1 V_1 + m_2 V_2 = m_1 V_1' + m_2 V_2',$$

и закон сохранения энергии

$$m_1 V_1^2 + m_2 V_2^2 = m_1 V_1'^2 + m_2 V_2'^2.$$

Решение

$$m_1(V_1' - V_1) = m_2(V_2 - V_2'),$$
$$m_1(V_1'^2 - V_1^2) = m_2(V_2^2 - V_2'^2).$$

Разделим первое уравнение системы на второе:

$$V_1 + V_1' = V_2 + V_2',$$

$$V_1' = V_2 - V_1 + V_2',$$
$$V_2' = V_1 - V_2 + V_1'.$$

Подставим полученные выражения в закон сохранения импульса

$$m_1V_1 + m_2V_2 = m_1V_2 - m_1V_1 + m_1V_2' + m_2V_2',$$

$$V_2' = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}V_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2}V_1,$$
$$V_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}V_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}V_2.$$

Анализ полученных решений:

1. Если $m_1 = m_2$, то
$$V_2' = V_1, \qquad V_1' = V_2.$$

2. Если $V_2 = 0$, то
$$V_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}V_1, \qquad V_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}V_1.$$

Решение этой задачи в системе центра инерции (СЦИ). Скорость движения центра инерции:

$$V_c = \frac{m_1V_1 + m_2V_2}{m_1 + m_2}$$

Скорости шаров до соударения и после в СЦИ: $V_{1c}, V_{2c}, V_{1c}', V_{2c}'$.
Формулы перехода к СЦИ:

$$V_{1c} = V_1 - V_c,$$
$$V_{2c} = V_2 - V_c,$$
$$V_{1c}' = V_1' - V_c,$$
$$V_{2c}' = V_2' - V_c.$$

Законы сохранения импульса и энергии:

$$m_1V_{1c} + m_2V_{2c} = m_1V_{1c}' + m_2V_{2c}',$$

$$m_1V_{1c}^2 + m_2V_{2c}^2 = m_1V_{1c}'^2 + m_2V_{2c}'^2.$$

Решением полученной системы является:

$$V_{1c}' = -V_{1c}, \qquad V_{2c}' = -V_{2c}.$$

Анализ полученных решений:

$$V'_{1c} = V'_1 - V_c = -V_{1c} = -(V_1 - V_c),$$

$$V'_1 = -V_1 + 2V_c, \qquad V'_2 = -V_2 + 2V_c.$$

Умножим первое уравнение на m_1, а второе на m_2

$$m_1 V_{1c} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(V_1 - V_2),$$

$$m_2 V_{2c} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(V_2 - V_1).$$

Из полученного выражения находим формулу для вычисления приведенной массы системы двух материальных точек

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

2.2. Векторная диаграмма для абсолютного упругого удара

Масса M в результате упругого удара рассеивается на массе m ($M > m$) (см. рис. 4.3).

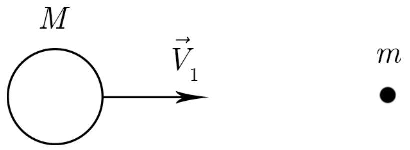

Рис. 4.3

$$V_c = \frac{M}{M+m} V_1,$$

$$V_{1c} = V_1 - V_c = V_1 \frac{m}{M+m},$$

$$V_{2c} = 0 - V_c = -V_1 \frac{M}{M+m},$$

$$p_{1c} = \frac{Mm}{M+m} V_1 = \mu V_1,$$

$$p_{2c} = -\mu V_1, \qquad p_{1c} = -p_{2c}.$$

Закон сохранения энергии

$$\frac{p_{1c}^2}{2M} + \frac{p_c^2}{2m} = \frac{p_{1c}^{\prime 2}}{2M} + \frac{p_c^{\prime 2}}{2M}, \qquad |p_c| = |p'_c|.$$

Из полученного соотношения следует, что импульс системы не изменяется по модулю, он может менять только направление. Покажем это на диаграмме (см. рис. 4.4).

Здесь θ — угол рассеивания, θ' — угол рассеивания в СЦИ, $\theta_{\max}$ — максимальный угол рассеивания.

$$\sin\theta_{\max} = \frac{V'_{1c}}{V_c} = \frac{m}{M}.$$

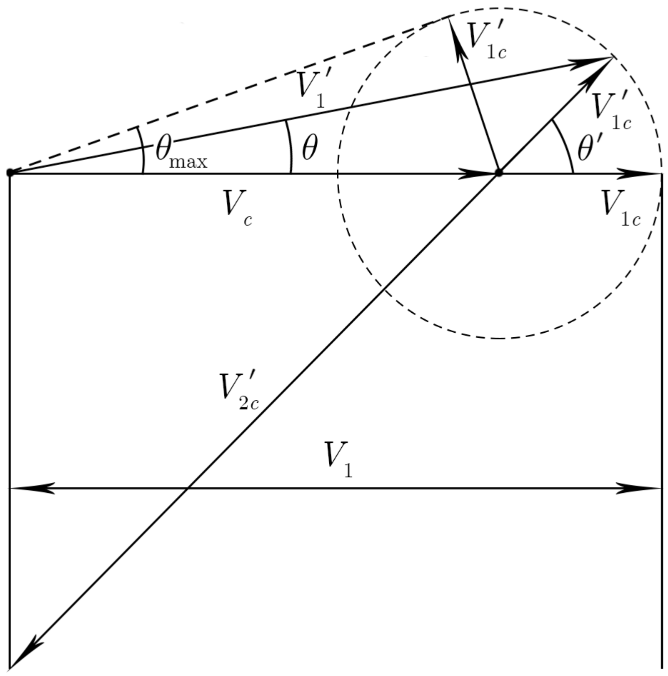

Рис. 4.4

2.3. Абсолютно неупругий удар

Рассмотрим столкновение двух шариков, в результате которого они слипнутся и продолжат движение как одно целое (см. рис. 4.5).

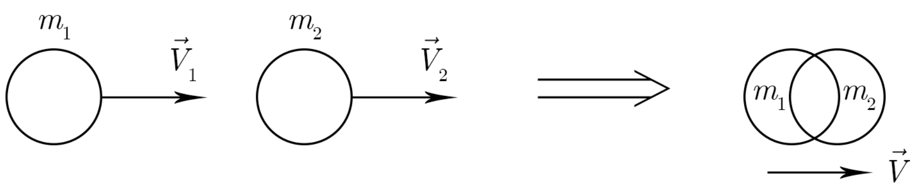

Рис. 4.5

После соударения система будет двигаться, как единое целое, со скоростью V

$$V = \frac{m_1 V_1 + m_2 V_2}{m_1 + m_2} = V_c.$$

При абсолютно неупругом ударе отсутствует относительное движение. Поэтому если подсчитать разность кинетических энергий до и после соударения, мы получим следующее соотношение

$$K_{\text{до}} - K_{\text{после}} = \frac{1}{2}\mu(V_1 - V_2)^2.$$

При абсолютно неупругом ударе относительное движение «исчезает», представляя собой потерю при неупругом соударении.

2.4. Эндотермический удар

Пусть на пути шарика массой m имеется горка высотой h и массой M (см. рис. 4.6).

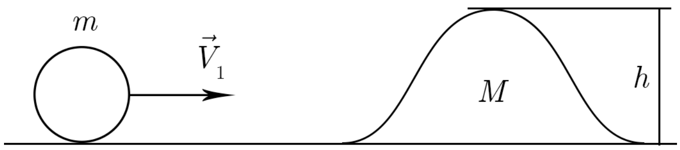

Рис. 4.6

Пороговой энергией называют величину, равную минимальной кинетической энергии, которой должен обладать шарик массой m, чтобы преодолеть горку высотой h и массой M.

$$K_{\text{пор}} = mgH(1 + \frac{m}{M}).$$

Тело A массой M соударяется с неподвижным телом B массой m (см. рис. 4.7). Определим пороговое значение кинетической энергии тела A.

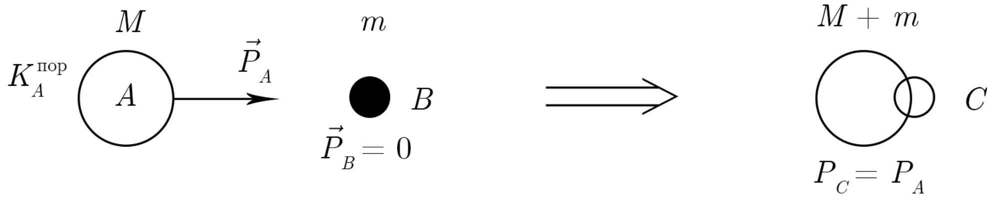

Рис. 4.7

Закон сохранения энергии

$$\frac{p_A^2}{2m} = Q + \frac{p_c^2}{2(M+m)}, \quad p_c = p_A.$$

Умножим и разделим уравнение на m:

$$K_{\text{пор}} = \frac{p_A^2}{2m} = Q + \frac{p_c^2}{2(M+m)},$$

$$K_{\text{пор}}(1 - \frac{m}{m+M}) = Q \qquad \Rightarrow \qquad K_{\text{пор}} = Q(1 + \frac{m}{M}).$$

Значение пороговой энергии всегда больше, чем поглощенная энергия.

3. Специальная теория относительности. Преобразование координат Галилея

Рассмотрим две СК, одна из которых движется относительно другой с постоянной скоростью V, а другая неподвижна. В подвижной СК находится объект, который движется с некоторой скоростью U (см. рис. 4.8).

$$\vec{U} = \vec{U}' + \vec{V}, \qquad \vec{r} = \vec{r}' + \vec{\rho} = \vec{r}' + \vec{V}t,$$
$$\vec{U} = \dot{\vec{r}}, \qquad \vec{U}' = \dot{\vec{r}}', \qquad \vec{a} = \vec{a}', \qquad t = t'.$$

Ускорение a является инвариантом, то есть является постоянной величиной во всех системах отсчета.

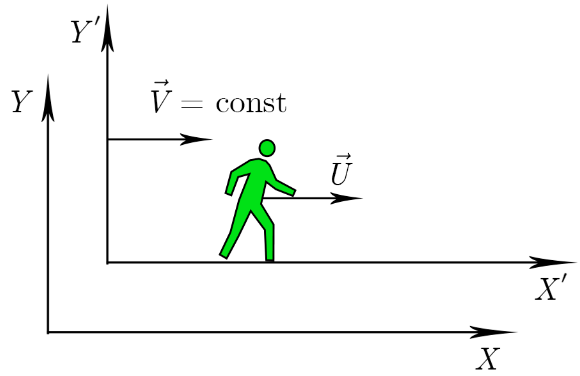

Рис. 4.8

1. Скорость света постоянна во всех инерциальных системах отсчета
$$c = c' = 299792458\,\tfrac{м}{c} \approx 3 \cdot 10^8\,\tfrac{м}{c}.$$
2. Пространство, в котором происходят все события, Евклидово, а значит однородно и изотропно.
3. Время в различных системах отсчета течет неодинаково.

Событие характеризуется временем и местом.

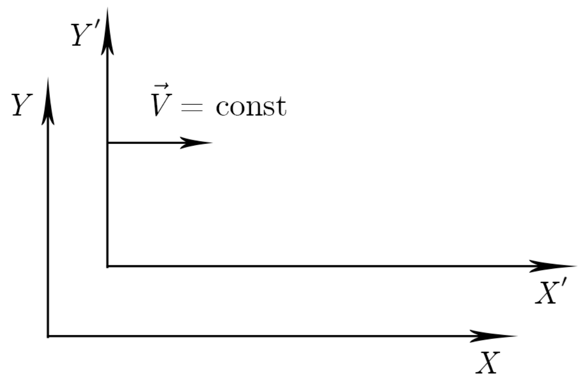

Рис. 4.9

Примем за событие вспышку света, которая произошла:

1. В неподвижной системе (x_1, y_1, z_1, t_1).
2. В подвижной системе (x'_1, y'_1, z'_1, t'_1).

Прием сигнала произошел уже в другой точке (x_2, y_2, z_2, t_2).
Расстояние между точками, в которых произошли описанные события
$$\begin{cases} c(t_2 - t_1), \\ \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \end{cases}$$

Интервал между двумя событиями

$$S_{12} = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2}.$$

Для рассмотренного случая $S_{12} = 0$.
Рассмотрим интервал между событиями в подвижной системе

$$S'_{12} = \sqrt{c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2}.$$

Для рассмотренного случая $S'_{12} = 0$, поэтому если $S_{12} = 0$, то и $S'_{12} = 0$. Нетрудно показать, что $S_{12} = S'_{12}$. Интервал между событиями является инвариантом во всех системах отсчета.