ЛЕКЦИЯ 5

СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

1. Преобразования Лоренца

Рассмотрим абсолютное движение тела относительно неподвижной системы отсчета x. Также тело движется со скоростью U в подвижной инерциальной системе отсчета x', которая в свою очередь движется со скоростью V' относительно неподвижной x (см. рис. 5.1). Время в ИСО одинаково.

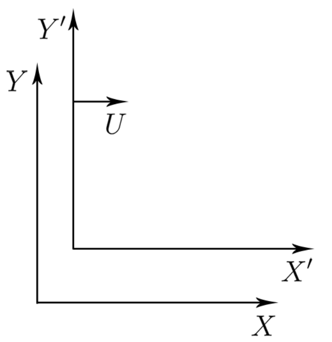

Рис. 5.1

$$x = x' + Ut, \quad V = V' + U, \quad a = a', \quad t = t'.$$

Инвариант в классической механике — ускорение тела. Тогда **принцип Галилея** формулируется так: все законы механики инварианты относительно преобразований Галилея, то есть они одинаковы во всех ИСО.

Если скорость подвижной системы отсчета велика (близка к скорости света) относительно другой ИСО, то скорость тела относительно неподвижной ИСО будет больше скорости света. Но скорость света одинакова во всех ИСО ($c = c'$), следовательно, имеем противоречие. Интервал между двумя событиями есть величина, равная

$$S_{12} = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2} \text{ [м]}$$

в четырехмерном пространстве.

Интервал между событиями в другой системе отсчета

$$S'_{12} = \sqrt{c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2}.$$

То есть интервал — инвариант. Получается, интервалы равны: $S_{12} = S'_{12}$.

Рассмотрим 2 системы с часами. Система K' двигается со скоростью V (см. рис. 5.2). Когда часы 3 проходят часы 1, время сбрасывается. Когда проходят часы 2, останавливаются. Для этого необходимо часы 1 и 2 синхронизировать (рассм. ранее).

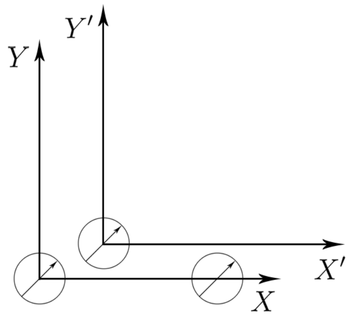

Рис. 5.2

Рассмотрим малые промежутки времени

$$t_2 - t_1 = dt, \quad t'_2 - t'_1 = dt'.$$

Часы 3 неподвижны в системе отсчета K':

$$dx' = dy' = dz' = 0, \quad dS^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \quad dS'^2 = c^2dt'^2.$$

С учетом $dS^2 = dS'^2$ получаем

$$c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2dt'^2.$$

Собственное время имеет вид

$$dt' = dt\sqrt{1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2dt^2}} = dt\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}.$$

Оно всегда меньшее из двух величин. Это релятивистское соотношение, называемое **Лоренцево сокращение времени**.

Обозначим $\frac{V}{c} = \beta$, и релятивистский фактор $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, тогда $dt' = \frac{dt}{\gamma}$.

2. Лоренцево сокращение длины

Имеется линейка в подвижной системе отсчета K'. Необходимо найти длину линейки в неподвижной системе отсчета K (см. рис. 5.3). Верны следующие формулы:

$$l = V\Delta t_k, \quad l_0 = V\Delta t_{k1}, \quad \Delta t_{k1} = \frac{\Delta t_k}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \frac{l}{l_0} = \frac{\Delta t_k}{\Delta t_{k1}} = \sqrt{1-\beta^2}.$$

Ответ: $l = l_0\sqrt{1-\beta^2}$.

В неподвижной системе отсчета длина линейки меньше, чем в подвижной.

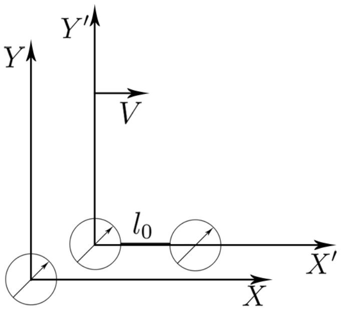

Рис. 5.3

3. Продольный эффект Доплера

заключается в изменении частоты сигнала в движущейся системе отсчета (приближающейся и удаляющейся).

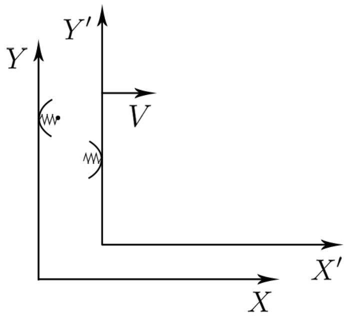

Рис. 5.4

В системе K есть излучатель $И$, излучающий фотовспышки с периодом и частотой $T, \nu(\omega)$. В системе отсчета K' имеется приемник (см. рис. 5.4).

τ_n — время в К-системе от излучения до приема 2-го сигнала после 1-го.

$$\tau_n = T + \frac{x}{c} = T + \frac{V\tau_n}{c}, \quad \tau_n = \frac{T}{1-\beta}.$$

В K'-системе

$$\tau' = \tau\sqrt{1-\beta^2} = T\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta} = T\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}.$$

— формула продольного эффекта Доплера.

При удалении

$$T' = T\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}, \quad \nu' = \nu\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}, \quad \omega' = \omega\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}.$$

При приближении

$$T' = T\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}, \quad \nu' = \nu\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}.$$

Если $V << a$, тогда при удалении

$$\frac{1}{1+\beta} \approx 1-\beta, \text{ тогда } \omega' = \omega(1-\beta),$$

что подтверждают опыты в оптике.

При приближении

$$\omega' = \omega(1-\beta).$$

4. Преобразование координат и времени

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad y = y', \; z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

5. Проверка преобразований Лоренца

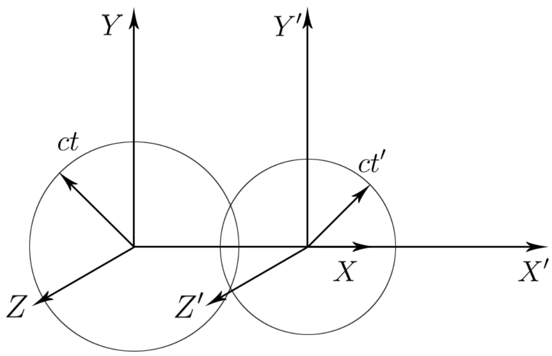

Рис. 5.5

В неподвижной системе отсчета произошла вспышка. Подвижная система отсчета совпадала в момент вспышки в неподвижной, а далее она удаляется со скоростью V (см. рис. 5.5). В подвижной системе отсчета тоже будет восприниматься вспышка.

Для K-системы

$$c^2t^2 = x^2 + y^2 + z^2 \to \Delta S = 0.$$

Для K'-системы

$$c^2t'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 \to \Delta S' = 0.$$

После подстановки имеем

$$c^2t^2 = \frac{c^2}{1-\frac{V^2}{c^2}}(t'^2 + \frac{2V}{c^2}x't' + \frac{V^2}{c^4}x'^2) = \frac{x'^2 + 2x'Vt' + V^2t'^2}{1-\frac{V^2}{c^2}} + y'^2 + z'^2,$$

$$c^2t'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2.$$

Полученное тождество иллюстрирует, что преобразование Лоренца работает правильно.

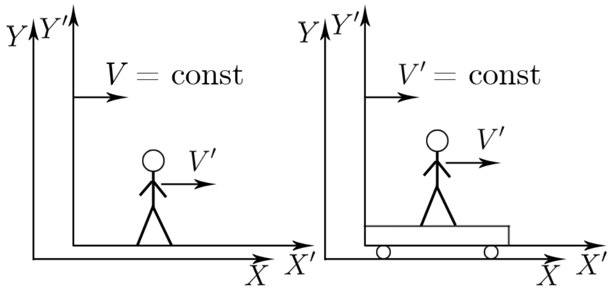

Рис. 5.6

6. Сложение скоростей

$$dx = \frac{dx' + V dt'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad dt = \frac{dt' + \frac{V}{c^2} dx'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Скорость относительно неподвижной системы K при преобразовании Лоренца

$$V = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + V dt'}{dt' + \frac{V}{c^2} dx'} = \frac{V' + V}{1 + \frac{VV'}{c^2}}.$$

Пусть $V' = c$, тогдв

$$V = \frac{c + V}{1 + \frac{Vc}{c^2}} = c.$$

7. Релятивистская динамика

Релятивистский импульс

$$\vec{p} = \frac{m\vec{V}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma m \vec{V}.$$

Полная энергия

$$\varepsilon = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma mc^2.$$

Под mc^2 понимается полная энергия покоя в микромире. Если $V \to c$, то $p \to \infty$ и $\varepsilon \to \infty$.

Любой материальный объект, скорость которого стремиться к скорости света, не может существовать. Единственная частица, которая может так двигаться — это частица, не обладающая энергией покоя — фотон (квант света, гамма квант, квант электромагнитной энергии). Свет обладает корпускулярными свойствами, то есть свойствами, которыми обладали бы частицы.

Свет (фотон): m=0, $\varepsilon = pc$.

Для частиц: $V \to c$ и $\varepsilon \approx pc$ (ультрарелятивистские частицы).

Формула для вычисления полной энергии частицы

$$\varepsilon^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \to (mc^2)^2 = \varepsilon^2 - p^2c^2 = inv \text{ (инвариант)}.$$

Уравнение движения тела в релятивистском случае

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{V}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\right) = \vec{F}.$$

Продифференцировав по времени, получаем

$$\frac{m\dot{\vec{V}}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} + \frac{m\vec{V}(\vec{V}\dot{\vec{V}})}{c^2(1-\frac{V^2}{c^2})^{3/2}} = \vec{F}, \vec{F}||\vec{a}.$$

Изменение кинетической энергии

$$dK = d(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}),$$

$$K = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} - mc^2 = \varepsilon - mc^2 = mc^2(\gamma - 1).$$

Кинетическая энергия — это полная энергия за вычетом энергии покоя.
Запишем кинетическую энергию для малых скоростей, используя бином Ньютона

$$K = mc^2(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} - 1) \approx |V << c| \approx mc^2(1 + \frac{V^2}{2c^2} - 1) = \frac{mV^2}{2}.$$

Импульс

$$\gamma m = \frac{\varepsilon}{c^2} \rightarrow \vec{p} = \frac{\varepsilon}{c^2}\vec{V},$$
$$pc = \sqrt{K(K + 2mc^2)}.$$

8. Столкновение двух частиц

Пусть сталкиваются две частицы (см. рис. 5.7).

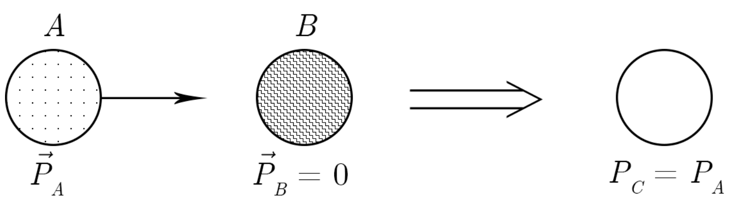

Рис. 5.7

Здесь A — снаряд, B — мишень.

В результате обычно получаем частицу C, импульс которой равен импульсу частицы A.

В системе центра инерции

$$\vec{V}_{\text{ц}} = \frac{\sum \vec{p}_i c^2}{\sum \varepsilon_i} = \frac{p_A c^2}{\varepsilon_A + m_B c^2}.$$

$$\varepsilon_{\text{Aц}} = \frac{\varepsilon_A - p_A V_{\text{ц}}}{\sqrt{1-\beta_F^2}}, \quad \varepsilon_{\text{Bц}} = \frac{m_B c^2 - 0}{\sqrt{1-\beta_{\text{ц}}^2}}, \quad \varepsilon_{\text{ц}} = \varepsilon_{\text{Aц}} - \varepsilon_{\text{Bц}} = \sqrt{m_A^2 c^4 + m_B^2 c^4 + 2 m_B c^2 \varepsilon_A}.$$

Если рассмотрим реакцию рождения протона (при столкновении двух протонов возникает протон и антипротон)

$$p + p \to p + p + (p + \tilde{p}).$$

Энергия этой системы

$$\varepsilon_F^2 = m_A^2 c^4 + m_B^2 c^4 + 2 m_B c^2 \varepsilon_A$$

$$\varepsilon_F^{\min} = 4 m_p c^2, \quad \varepsilon_{F\,\min}^2 = 2 m_p c^2 (m_p c^2 + \varepsilon_A) = 16 (m_p c^2)^2 \Rightarrow \varepsilon_A^{\min} = 7 m_p c^2.$$

ЛСО — лабораторная система отсчета.

Отсюда получается такая же формула и найдем пороговую энергию антипротона

$$\varepsilon_F^2 = m_A^2 c^4 + m_B^2 c^4 + 2 m_B c^2 \varepsilon_A$$

$$\varepsilon_F^{\min} = 4 m_p c^2, \quad \varepsilon_{F\,\min}^2 = 2 m_p c^2 (m_p c^2 + \varepsilon_A) = 16 (m_p c^2)^2 \Rightarrow \varepsilon_A^{\min} = 7 m_p c^2$$