ЛЕКЦИЯ 6

СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ. ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА. ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ

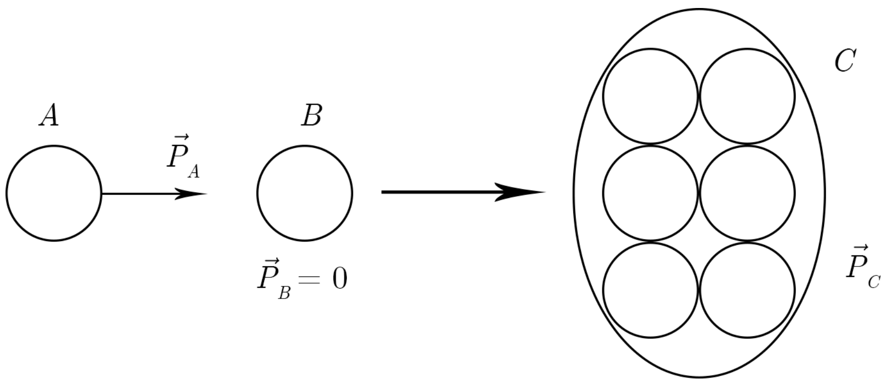

Рис. 6.1

На рис. 6.1 показано столкновение двух частиц. Здесь A — снаряд, B — мишень, C — результирующая частица с пороговой энергией (все получившиеся частицы), $\vec{p}_c = \vec{p}_A$.

Пороговая энергия — это минимальная энергия, необходимая для того, чтобы частицы C двигались без относительного движения.

Закон сохранения энергии:

$$\varepsilon_A + \varepsilon_{B0} = \varepsilon_C,$$

$$\varepsilon_A^2 + 2\varepsilon_A\varepsilon_{B0} + \varepsilon_{B0}^2 = \varepsilon_C^2 = \varepsilon_{c0}^2 + p_C^2 c^2,$$

$$\varepsilon_A^2 = \varepsilon_{A0}^2 + p_A^2 c^2.$$

Минимальная энергия частицы A

$$\varepsilon_{A\,\min} = \frac{\varepsilon_{c0}^2 - \varepsilon_{A0}^2 - \varepsilon_{B0}^2}{2\varepsilon_{B0}}.$$

Поглощенная энергия

$$Q = \varepsilon_{c0} - \varepsilon_{A0} - \varepsilon_{B0}.$$

Минимальная кинетическая энергия

$$K^{\min} = Q(1 + \frac{m_A}{m_B}).$$

Пример 3 (Столкновение двух протонов)

$$p + p \to (p + \tilde{p}) + p + p$$

Пороговая энергия

$$\varepsilon^{\min} = \frac{(2m_p c^2 + 2m_p c^2)^2 - 2m_p^2 c^4}{2m_p c^2} = 7m_p c^2.$$

1. Принципы относительности Галилея и Эйнштейна

Принцип относительности Галилея: все законы механики инвариантны, то есть одинаково записываются во всех ИСО, так как ускорение — инвариант.

Принцип относительности Эйнштейна: все законы физики инварианты относительно преобразований Лоренца.

2. Вращательное движение материальных тел

Точка не может вращаться, так как она не обладает геометрией.

Рассмотрим тело с массой m, центром масс C и связанной с ним системой координат $Cx'y'z'$. $Oxyz$ — неподвижная система координат (связанная с наблюдателем) (см. рис. 6.2).

Уравнения движения вращающегося тела:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \sum F_{ix}, \\ m\ddot{y} = \sum F_{iy}, \\ m\ddot{z} = \sum F_{iz}. \end{cases}$$

Число степеней свободы — число независимых переменных, с помощью которых можно указать положение тела в пространстве.

6 степеней свободы: при общем движении твердого тела в пространстве: 3 линейных (x, y, z) и 3 угловых координаты (α, β, γ). Изменение этих углов относительно какой-либо оси — движение вращения, поэтому добавляется еще три уравнения:

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \sum \vec{M}_i^{\text{внеш}},$$

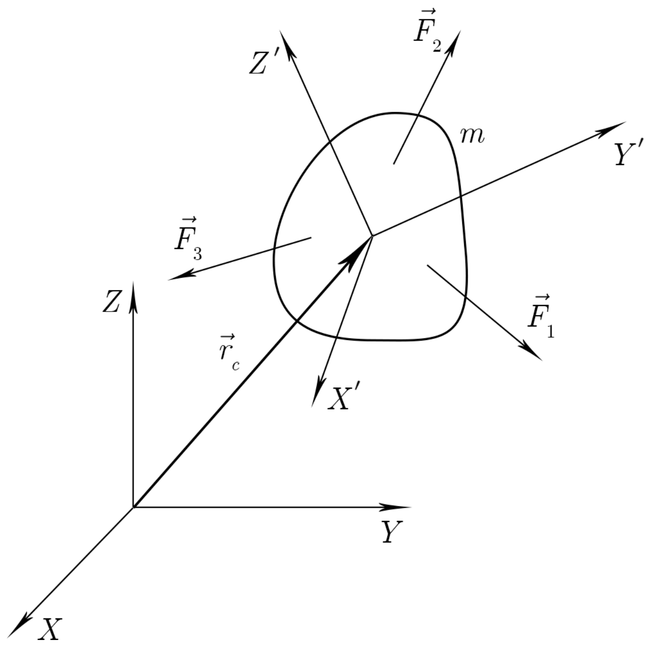

Рис. 6.2

где $\vec{L}_A$ — момент импульса системы материальных точек относительно какого-либо центра А, $\sum \vec{M}_i^{\text{внеш}}$ — момент от всех внешних сил относительно того же центра А.

Если точка A — движущаяся, то

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \sum \vec{M}_i^{\text{внеш}} - m[\vec{V}_A \vec{V}_c].$$

Если $A \equiv C$, то $[\vec{V}_A \vec{V}_c] = 0$.

Если сумма всех внешних сил и моментов от этих сил равна нулю, то тело находиться в состоянии относительного покоя или движется (вращается) по инерции:

$$\sum \vec{F}_i = 0, \quad \sum \vec{M}_i = 0.$$

Если вращений несколько, то они складываются.

Пример 4 Шар катится, центр масс двигается поступательно со скоростью V (см. рис. 6.3).

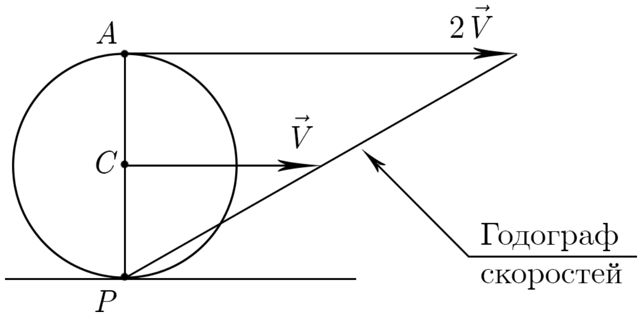

Рис. 6.3

Если шар двигается без проскальзывания, то самая нижняя точка шара P неподвижна, и через нее проходит мгновенная ось вращения, а скорость точки A в 2 раза больше скорости центра масс:

$$V_p = 0, \quad V_c = V, \quad V_A = 2V.$$

Если тело закреплено в центре масс и вращается, то ось, проходящая через этот центр — ось вращения (см. рис. 6.4).

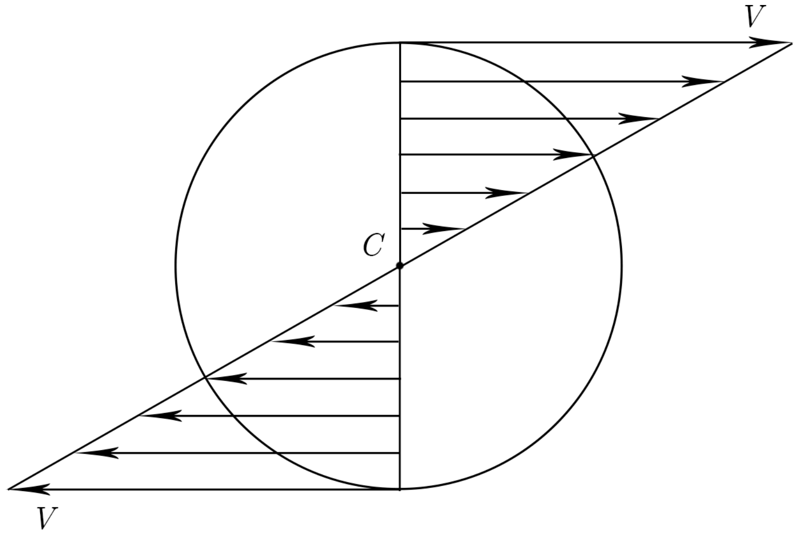

Рис. 6.4

Годограф скоростей всегда перпендикулярен оси вращения. Если тело вращается, то всегда можно найти мгновенную ось вращения.

Пусть точка M вращается вокруг оси с постоянной угловой скоростью ω (см. рис. 6.5). Тогда скорость равна:

$$V = \omega r \sin\alpha.$$

Вектор угловой скорости направлен так, чтобы, смотря с конца вектора, вращение было против часовой стрелки.

$$\vec{V} = [\vec{\omega}\vec{r}], \quad V = |\vec{V}| = |\vec{\omega}||\vec{r}|\sin\alpha$$

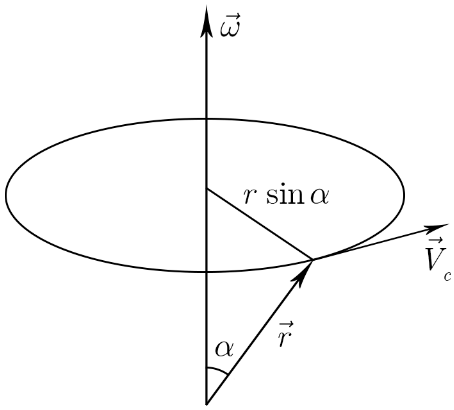

Рис. 6.5

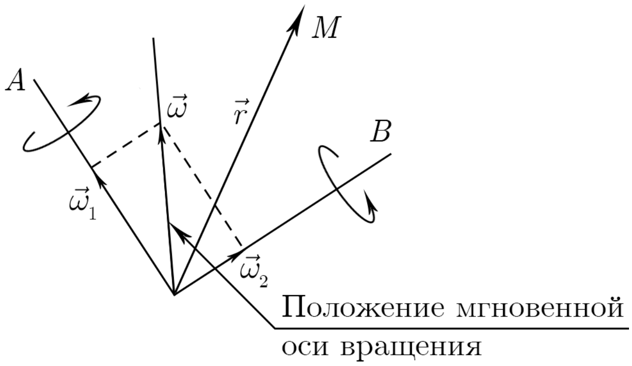

Рис. 6.6

Рассмотрим точку M, вращающуюся одновременно вокруг осей A и B (см. рис. 6.6). Суммарное вращение:

$$\vec{V} = [\vec{\omega}_1\vec{r}],$$
$$\vec{V} = [\vec{\omega}_2\vec{r}],$$
$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 = [(\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2)\vec{r}] = [\vec{\omega}\vec{r}],$$

где $\vec{\omega}$ — мгновенная ось вращения.

Пусть точка A переходит в точку B (см. рис. 6.7).

Угол поворота

$$\vec{\phi} = \int \vec{\omega} dt.$$

Интеграл пропорционален площади сектора AOB.

Проекции на оси:

$$\phi_x = \int \omega_x dt, \quad \phi_y = \int \omega_y dt, \quad \phi_z = \int \omega_z dt.$$

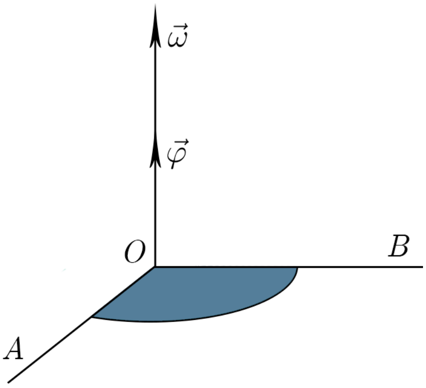

Рис. 6.7

3. Пространственный поворот

Рассмотрим три поворота (см. рис. 6.8).

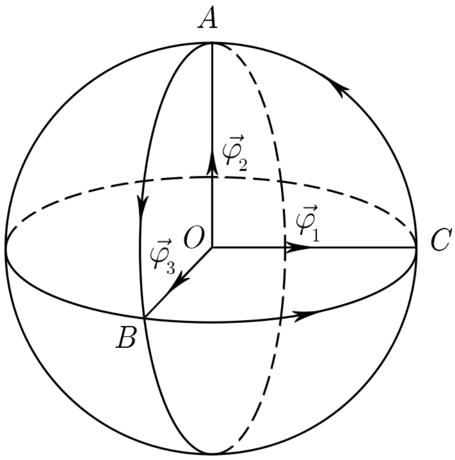

Рис. 6.8

Получились 3 взаимно перпендикулярных, некомпланарных вектора. Поэтому $\phi_3 \neq \phi_1 + \phi_2$ — неаддитивность угловых поворотов. Но для бесконечно малых поворотов равенство выполняется (см. рис. 6.9).

$$\delta\vec{\phi}_3 = \delta\vec{\phi}_1 + \delta\vec{\phi}_2$$

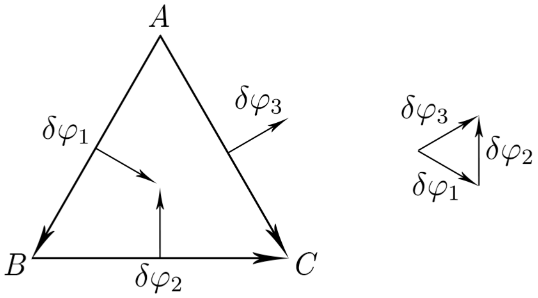

Рис. 6.9

4. Закон всемирного тяготения

Пусть два тела массами M_1 и M_2, расстояние между которыми равно r, притягиваются (см. рис. 6.10).

Сила притяжения между двумя материальными телами с массами M_1 и M_2 выражается следующим образом:

$$F = \frac{\gamma M_1 M_2}{r^2}.$$

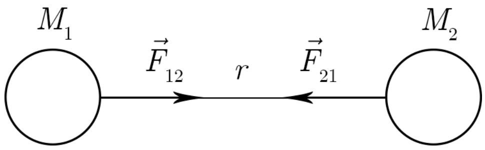

Рис. 6.10

Гравитационное поле Земли — поле, которое создает силу притяжения объектов на Земле или около нее. Это поле однородно (см. рис. 6.11).

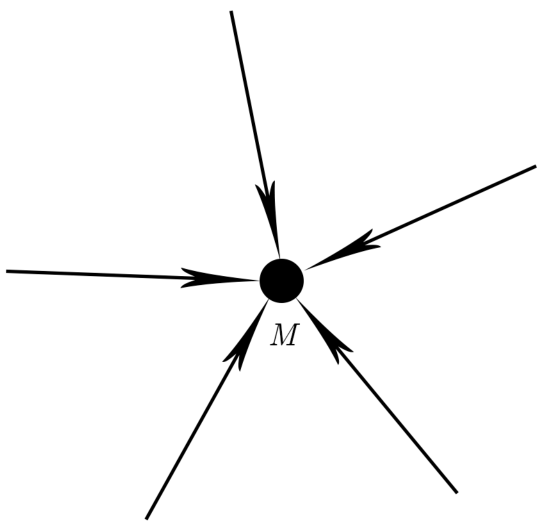

Рис. 6.11

Напряженность гравитационного поля Земли

$$g = \frac{\gamma M}{r^2}.$$

Векторная запись:

$$\vec{g} = -\frac{\gamma M \vec{r}}{r^3}.$$

Тогда сила тяжести вычисляется так:

$$\vec{F} = m\vec{g}.$$

5. Теорема Гаусса в гравитационном поле

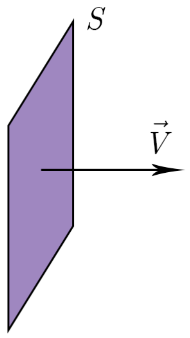

Рис. 6.12

Рассмотрим поток воды через площадь S со скоростью V (см. рис. 6.12).

Тогда поток вектора $Q = VS \equiv \Phi, S \perp V$. Для ориентации площадки в пространстве вводится понятие вектор $\vec{S}$, направленный по нормали к площадке.

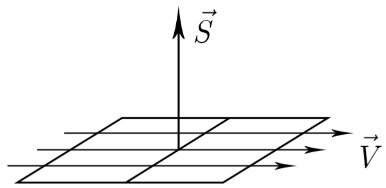

Рис. 6.13

В случае, изображенном на рис. 6.13, поток равен нулю $\Phi = 0$.

В общем случае поток является скалярным произведением: $\Phi = (\vec{V} \cdot \vec{S})$.

Точка M окружена поверхностью S. Разобьем поверхность на участки: чем меньше разбиение, тем точнее интегрирование (см. рис. 6.14). dS — элементарная площадка. Тогда поток вычисляется следующим образом:

$$d\Phi = (\vec{g}d\vec{S}), \qquad \Phi = \sum_{i=1}^{N} (\vec{g}_i d\vec{S}_i)$$

При $N \to \infty$ поток представляет собой поверхностный интеграл по замкнутой поверхности:

$$\Phi = \oint \vec{g}d\vec{S} = \oint \frac{\gamma M}{r^2} dS \cos\alpha.$$

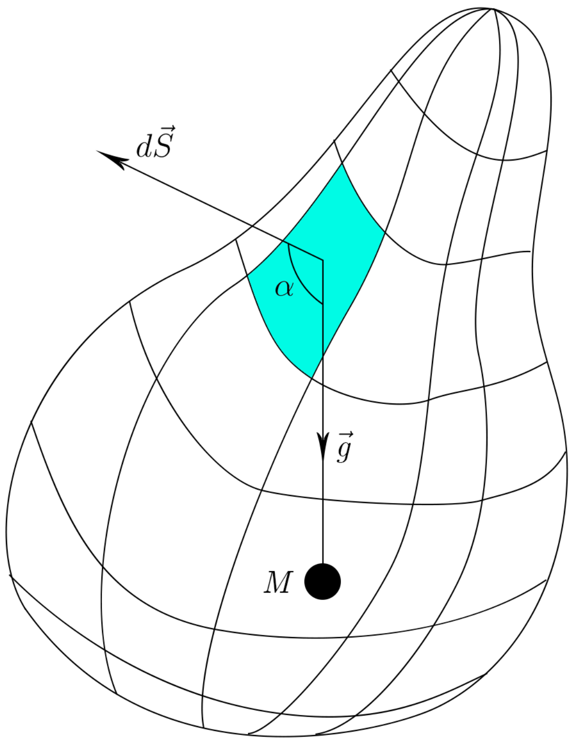

Рис. 6.14

Можно перейти интергированию по телесному углу (см. рис. 6.15 и 6.16).
Телесный угол

$$d\Omega = \frac{dS\cos\alpha}{r^2}, \qquad \Omega = \frac{S_{AD}}{r^2} = 2\pi(1-\cos\alpha)$$

$$\Phi = \gamma M \int d\Omega = 4\pi\gamma M.$$

Если в поверхности нет массы, то поток через эту поверхность равен нулю.
На поток действует аддитивный закон:

$$\Phi_g = \begin{cases} 4\pi\gamma \sum M_i, \\ 0. \end{cases}$$

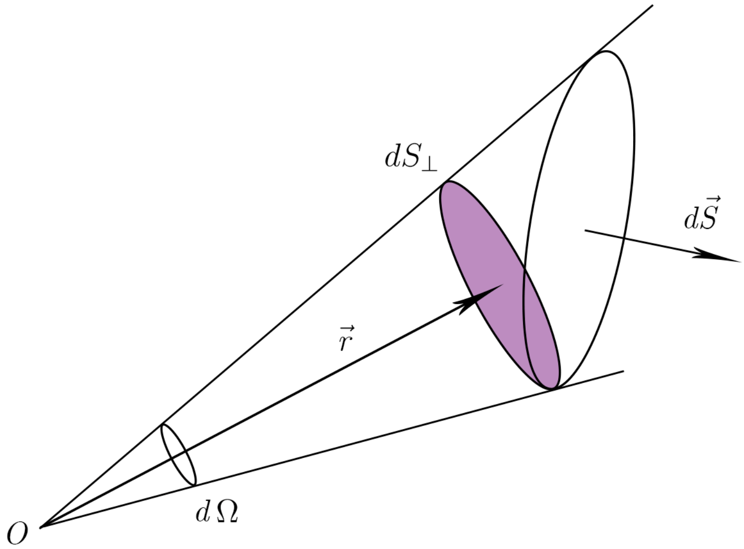

Рис. 6.15

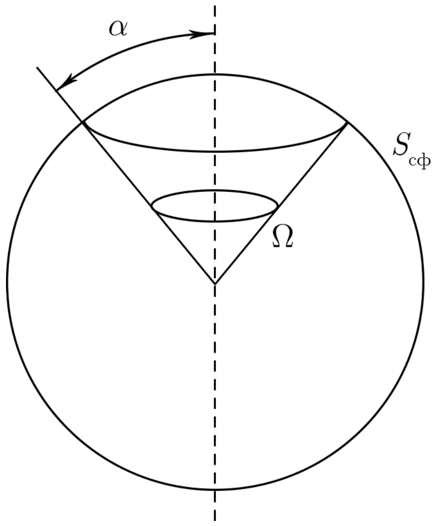

Рис. 6.16

Пример 5 (Поле шара с радиусом R) Как распределен вектор напряженности внутри шара? Плотность равномерно распределена: $\rho = const$.

Вырезаем сферическую поверхность меньше радиуса r (см. рис. 6.17). Тогда поток по теореме Гаусса

$$\Phi_g\Big|_{r\leqslant R} = g(r)4\pi r^2 = 4\pi\gamma\frac{4}{3}\pi r^3\rho,$$

$$g(r) = \frac{4}{3}\pi\rho\gamma r.$$

График зависимости напряженности от расстояния приведен на (см. рис. 6.18).

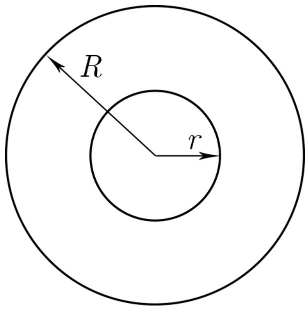

Рис. 6.17

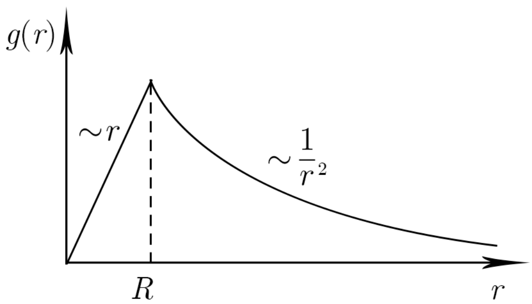

Рис. 6.18