ЛЕКЦИЯ 8

МОМЕНТ ИНЕРЦИИ. ТЕОРЕМА ЭЙЛЕРА ОБ ОБЩЕМ ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА. ВРАЩЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ОТНОСИТЕЛЬНО ЗАКРЕПЛЕННОЙ ОСИ. КАЧЕНИЕ

1. Момент инерции тела. Вращение тел вокруг оси.

Рассмотрим твердое тело, вращающееся с угловой скоростью ω и поступательно движущееся с некоторой скоростью.

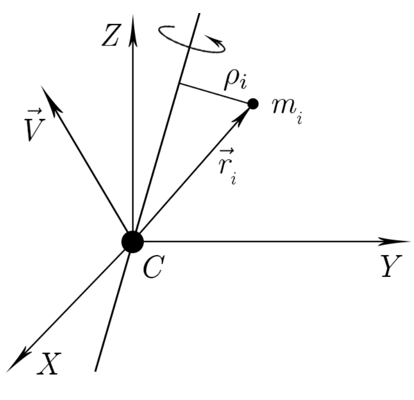

Рис. 8.1

Энергия тела и момент инерции будут равны

$$K = \frac{MV_c^2}{2} + \frac{1}{2} I_\omega \omega^2,$$

$$I_\omega = \sum m_i \rho_i^2.$$

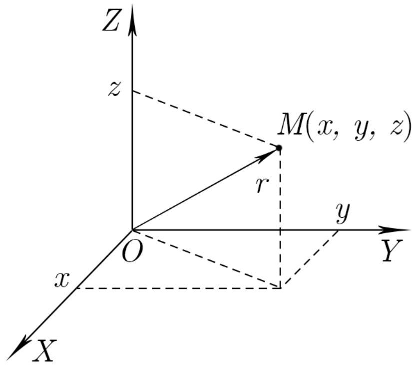

Рис. 8.2

Если точка массой M имеет координаты x, y и z (см. рис. 8.2) то моменты инерции относительно осей OX, OY и OZ будут равны

$$I_x = M(y^2 + z^2), \quad I_y = M(x^2 + z^2), \quad I_z = M(x^2 + y^2),$$

$$I_x + I_y + I_z = 2Mr^2.$$

Рассмотрим моменты инерции для некоторых фигур.

Рассмотрим некоторую произвольную фигуру (см. рис. 8.3).

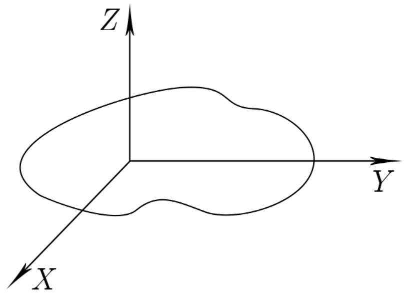

Рис. 8.3

Для плоской фигуры

$$I_z = Mr^2, \qquad I_x + I_y + I_z = 2I_z, \qquad I_x + I_y = I_z.$$

Для симметричных фигур момент инерции равен

$$I_x = I_y, \qquad 2I_x = I_z.$$

Момент инерции для сферы

$$I_x = I_y = I_z, \qquad I_x = \frac{2}{3}Mr^2.$$

Формулы моментов инерций для некоторых трехмерных тел:

1. Цилиндр: $I = \frac{Mr^2}{2}$.
2. Стержень: $I = \frac{Ml^2}{3}$.
3. Шар: $I = \frac{2}{5}mR^2$.

Очень важно научиться считать моменты инерции относительно оси параллельной оси симметрии. В этих случаях используют теорему Штейнера.

2. Теорема Штейнера

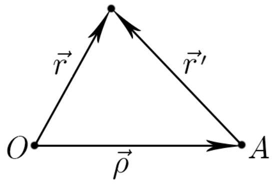

Рис. 8.4

Имеются две оси O и A, они параллельны друг другу и перпендикулярны плоскости рисунка; r и r' определяют положение dm относительно оси O и A соответственно (см. рис. 8.4).

Рассмотрим связь между моментами инерции этой точки относительно заданных осей:

$$\vec{r'} = \vec{r} - \vec{\rho},$$

$$r'^2 = r^2 - \rho^2 - 2(\vec{r}\vec{\rho}).$$

Момент инерции относительно оси A:

$$r^2 + \rho^2 - 2\left(\vec{r}\vec{\rho}\right),$$

$$I_A = \int r'^2 dm = \int r^2 dm - \rho^2 \int dm - 2\left(\vec{\rho}\int \vec{r}dm\right),$$

$$I_O = \int r^2 dm,$$

$$\rho^2 \int dm = M\rho^2,$$

$$\vec{R}_c = \frac{\int \vec{r}dm}{M},$$

$$I_A = I_O + M\rho^2 - 2M\left(\vec{\rho}\vec{R}_c\right).$$

Для упрощения записи положим, что т. O — центр инерции тела. Тогда

$$R_c = 0, \quad I_A = I_O + M\rho^2.$$

3. Теорема Эйлера

Движение твердого тела можно разделить на

1. Поступательное движение центра масс (см. рис. **??**),
2. Вращение тела вокруг центра масс (см. рис. 8.5).

$$\vec{\rho} = \vec{R} + \vec{r}.$$

Сместим точку M на $d\rho$

$$d\vec{\rho} = d\vec{R} + d\vec{r},$$

$$dr = r\sin\theta d\vec{\varphi},$$

$$d\vec{r} = [d\vec{\varphi}\vec{r}],$$

$$d\vec{\rho} = d\vec{R} + d\vec{r} = d\vec{R} + [d\vec{\varphi}\vec{r}].$$

Введем следующие обозначения:

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{V},$$

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{V}_c,$$

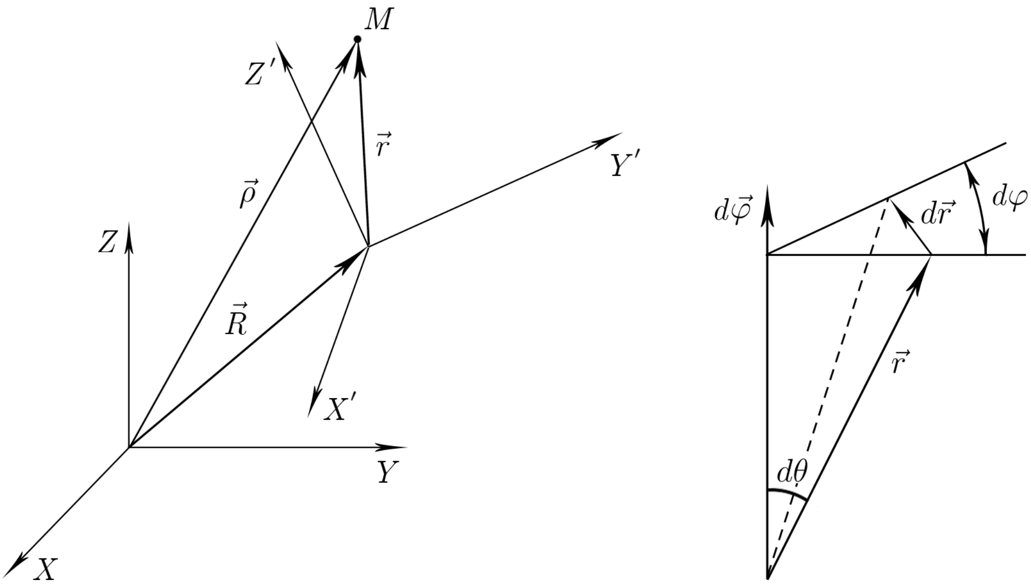

Рис. 8.5

$$\frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \vec{\omega}.$$

В итоге получаем

$$\vec{U} = \vec{V} + [\vec{\omega}\vec{r}].$$

Как видно из полученной формулы, скорость материальной точки всегда можно представить в виде поступательной скорости центра масс и скорости поворота материальной точки вокруг некоторой оси (см. рис. 8.6).

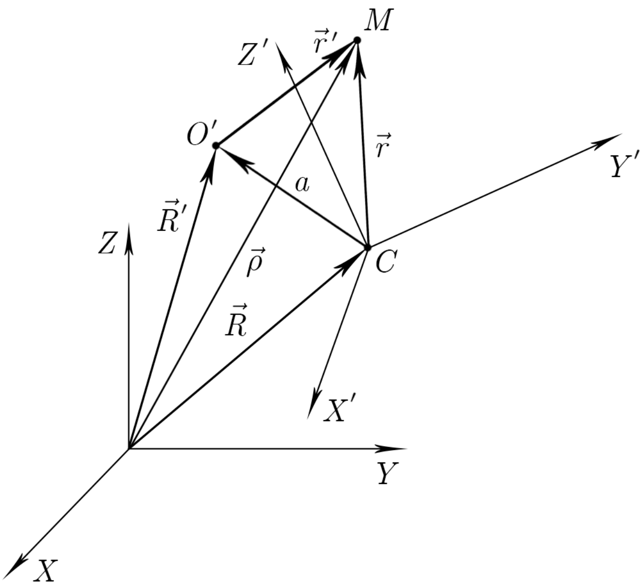

Рис. 8.6

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{r}\,',$$

$$\vec{\rho} = \vec{R}' + \vec{r}' = \vec{R} + \vec{r}.$$

Проведя аналогичные преобразования, получаем

$$\vec{U} = \vec{V}_c + [\vec{\omega}\vec{r}] = \vec{V}_c + [\vec{\omega}\vec{a}] + [\vec{\omega}\vec{r}'].$$

С другой стороны,

$$\vec{\rho} = \vec{R}' + \vec{r}' \Rightarrow \frac{d\vec{\rho}}{dt} = \frac{d\vec{R}'}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d\vec{R}'}{dt} + \left[\frac{d\vec{\varphi}'}{dt}\vec{r}\right],$$

$$\vec{U} = \vec{V}' + [\vec{\omega}'\vec{r}'].$$

Рассмотрим полученные соотношения для U:

$$\vec{V}' = \vec{V}_c + [\vec{\omega}\vec{a}],$$

$$\omega' = \omega.$$

Из полученных соотношений следует, что угловая скорость вращения твердого тела не зависит от оси и можно сделать вывод, что

$$\vec{V}_c \perp \vec{\omega} \rightarrow \vec{V}' \perp \vec{\omega}.$$

Из полученной формулы для V' можно выбрать такую O', что $V' = 0$. Такую точку называют мгновенной осью вращения. Примером такого движения является вращение.

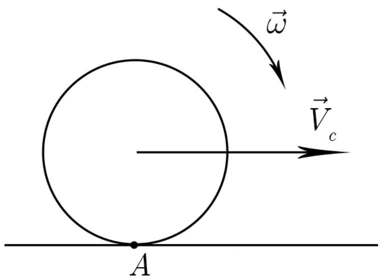

Рис. 8.7

Точка A — мгновенная ось вращения (см. рис. 8.7).

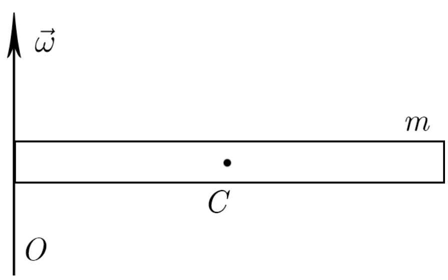

Рис. 8.8

Рассмотрим стержень вращающийся относительно оси O со скоростью ω (см. рис. 8.8). В начальный момент времени стержень «слетает» с оси и начинает двигаться, вращаясь вокруг оси проходящей через центр масс со скоростью Ω. Определим соотношения скоростей ω и Ω.

$$V_o = \frac{\omega L}{2},$$

$$L_o = \frac{1}{3}mL^2\omega = \frac{1}{2}mL^2\Omega + m\frac{\omega L}{2}\frac{L}{2},$$

$$\frac{1}{3}\omega - \frac{1}{4}\omega = \frac{1}{12}\omega, \qquad \omega = \Omega.$$

4. Вращение тела относительно неподвижной оси

Рассмотрим тело, которое вращается относительно неподвижной оси. Как и раньше разобьём его на массы m_i (см. рис. 8.9).

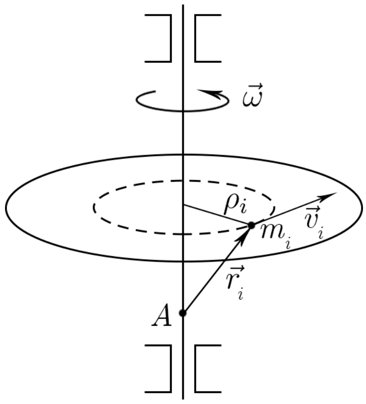

Рис. 8.9

Уравнение движения:

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_{\text{А внеш}}.$$

Перейдем к плоскому изображению (см. рис. 8.10).

$$\vec{L}_i = \left[\vec{r}_i m_i \vec{V}_i\right] = m_i\left[\vec{r}_i \vec{V}_i\right],$$

$$\vec{r}_i \perp \vec{V}_i, \qquad L_i = m_i r_i V_i, \qquad V_i = \omega\rho_i, \qquad L_{iz} = L_i\cos\alpha = \omega I.$$

Если тело однородно и симметрично относительно оси вращения, то:

$$\vec{L} \parallel \vec{\omega},$$

$$L = \sum L_{iz} = \omega\sum m_i\rho_i^2 = I\omega,$$

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \to \frac{dL}{dt} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

Последняя формула представляет собой уравнение вращения симметричного тела. Если же тело несимметрично, то см. рис. 8.11.

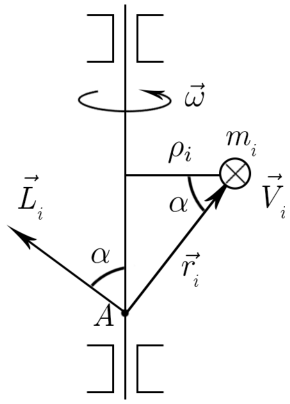

Рис. 8.10

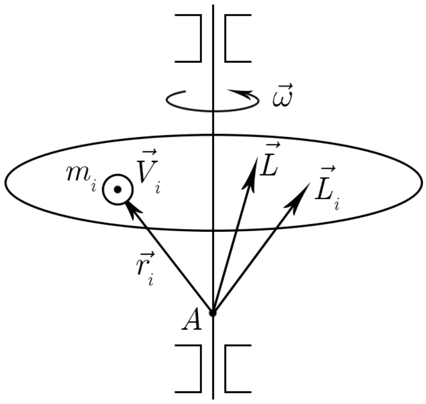

Рис. 8.11

Как видно из рисунка, вектор L не совпадает с вектором угловой скорости ω, поэтому в подшипниках возникают биения. Для того, чтобы от этого избавиться, например, в автомобилях все колёса балансируют, чтобы исключить вращение несимметричных масс.