ЛЕКЦИЯ 9

СКАТЫВАНИЕ ТЕЛ. ТЕНЗОР ИНЕРЦИИ. ЭЛЛИПСОИД ИНЕРЦИИ. ГИРОСКОП

1. Скатывание

Продолжим рассматривать твердое тело, которое скатывается с наклонной поверхности. В этом случае:

$$mgh = \frac{I_A}{2}\left(\frac{V}{R}\right)^2 = \frac{imR^2}{2}\frac{V}{R^2}, \qquad V = \sqrt{\frac{2gh}{i}}$$

1. Брусок: $i = 1$;
2. Обруч: $i = 2$;
3. Цилиндр: $i = \frac{3}{2}$;
4. Шар: $i = \frac{7}{5}$.

2. Момент импульса твердого тела

$$\vec{L} = \int \left[\vec{r}\vec{V}\right] dm, \qquad \vec{V} = \left[\vec{\omega}\vec{r}\right],$$

$$\left[\vec{r}\left[\vec{\omega}\vec{r}\right]\right] = \vec{\omega}r^2 - \vec{r}\left(\vec{r}\vec{\omega}\right),$$

$$\left(\vec{r}\vec{\omega}\right) = \omega_x x + \omega_y y + \omega_z z,$$

$$\vec{L} = \omega \int r^2 dm - \int \left(\vec{\omega}\vec{r}\right)\vec{r}dm.$$

Раскроем полученное соотношение покомпонентно:

$$\vec{L}_x = \int dm\left[\omega_x\left(x^2+y^2+z^2\right) - \omega_x x^2 - \omega_y xy - \omega_z xz\right],$$

$$\vec{L}_y = \int dm \left[\omega_y \left(x^2 + y^2 + z^2\right) - \omega_x xy - \omega_y y^2 - \omega_z yz\right],$$

$$\vec{L}_z = \int dm \left[\omega_z \left(x^2 + y^2 + z^2\right) - \omega_x xz - \omega_y yz - \omega_z z^2\right].$$

Вектор L в матричном виде:

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} \vec{L}_x \\ \vec{L}_y \\ \vec{L}_z \end{pmatrix} = \int dm \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix},$$

$$I = \begin{pmatrix} \int dm \left(y^2 + z^2\right) & -\int dmxy & -\int dmxz \\ -\int dmxy & \int dm \left(x^2 + z^2\right) & -\int dmyz \\ -\int dmxz & -\int dmyz & \int dm \left(x^2 + y^2\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}.$$

I — **тензор инерции**. Он представляет собой общую запись момента импульса твердого тела. Элементы, не стоящие на главной диагонали, называют центробежными моментами инерции. При этом для любого тела можно подобрать такую ортогональную систему XYZ, в которой матрица I будет диагональной. Оси такой системы называются главными осями инерции.

3. Эллипсоид инерции

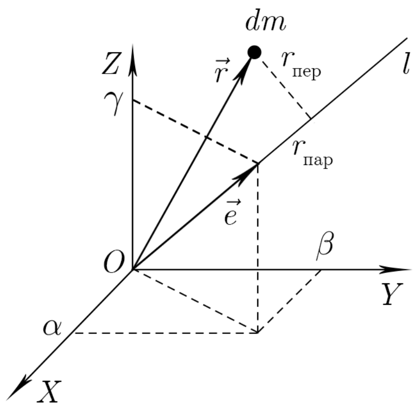

Рис. 9.1

На рисунке (см. рис. 9.1) e — единичный вектор, α, β, γ — направляющие косинусы.

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

$$I_l = \int x^2 + y^2 + z^2 - \left(x\alpha + y\beta + z\gamma\right)^2 dm.$$

После преобразования

$$I_l = \alpha^2 I_x + \beta^2 I_y + \gamma^2 I_z + 2\alpha\beta I_{xy} + 2\alpha\gamma I_{xz} + 2\beta\gamma I_{yz}.$$

Построим геометрический образ: отложим на оси Ol отрезок ON (см. рис. 9.2):

$$ON = \frac{1}{\sqrt{I_l}}, \qquad N\left(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}\right),$$

$$\tilde{x} = \frac{\alpha}{\sqrt{I_l}}, \quad \tilde{y} = \frac{\beta}{\sqrt{I_l}}, \quad \tilde{z} = \frac{\gamma}{\sqrt{I_l}},$$

$$\alpha = \tilde{x}\sqrt{I_l}, \quad \beta = \tilde{y}\sqrt{I_l}, \quad \gamma = \tilde{z}\sqrt{I_l}.$$

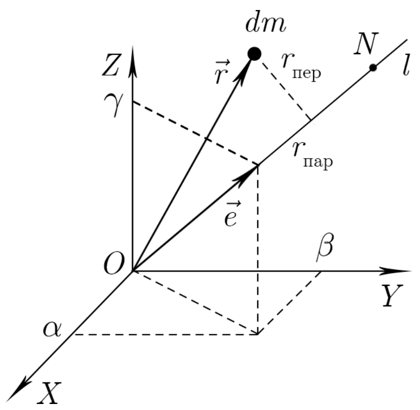

Рис. 9.2

Подставим полученные соотношения в формулу для I_{l_i}

$$I_l = \tilde{x}^2 I_l I_x + \tilde{y}^2 I_l I_y + \tilde{z}^2 I_l I_z + \left(2\tilde{x}\tilde{y}I_{xy} + 2\tilde{x}\tilde{z}I_{xy} + 2\tilde{y}\tilde{z}I_{yz}\right) I_l,$$

$$\tilde{x}^2 I_x + \tilde{y}^2 I_y + \tilde{z}^2 I_z + 2\tilde{x}\tilde{y}I_{xy} + 2\tilde{x}\tilde{z}I_{xy} + 2\tilde{y}\tilde{z}I_{yz} = 1.$$

Последнее соотношение — уравнение эллипсоида инерции. Перепишем его в главных осях x^*, y^*, z^*:

$$\frac{x^{*2}}{a^2} + \frac{y^{*2}}{b^2} + \frac{z^{*2}}{c^2} = 1,$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{I_{x^*}}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{I_{y^*}}}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{I_{z^*}}},$$

$$I_{x^*}x^{*2} + I_{y^*}y^{*2} + I_{z^*}z^{*2} = 1.$$

a, b, c — полуоси эллипсоида.

Если существует ось симметрии тела, то она же является главной центральной осью инерции. Ось называется центральной, если она проходит через центр масс тела.

Если существует плоскость симметрии тела, то любая ось перпендикулярная это плоскости является главной осью инерции.

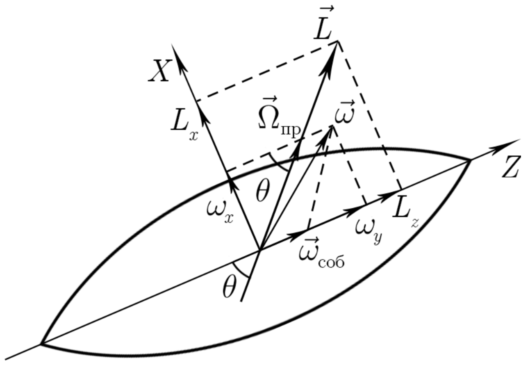

Рис. 9.3

4. Симметричный волчок

Ось OY перпендикулярна плоскости рисунка.

$$I_x = I_y \neq I_z, \qquad L_y = 0,$$

$$\vec{L} = I\vec{\omega},$$

$$I = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix},$$

$$L_x = I_x\omega_x, \quad L_y = I_y\omega_y = 0, \quad L_z = I_z\omega_z, \quad \omega_y = 0.$$

Вектор угловой скорости ω можно разложить на пару ω_x и ω_z, но также можно представить в виде суммы двух других векторов: $\Omega_{\text{пр}}$ и $\omega_{\text{соб}}$.

$\omega_{\text{соб}}$ — угловая скорость собственного вращения относительно оси Z.

$\Omega_{\text{пр}}$ — угловая скорость прецессионного вращения относительно вектора L, который при свободном движении остается постоянным.

$$\omega_x = \frac{L_x}{I_x} = \frac{L\sin\theta}{I_x},$$

$$\omega_x = \Omega_{\text{пр}}\sin\theta,$$

$$\frac{L\sin\theta}{I_x} = \Omega_{\text{пр}}\sin\theta,$$

$$\Omega_{\text{пр}} = \frac{L}{I_x} = \frac{\omega_x}{\sin\theta}.$$

Закрепим нижнюю точку волчка и положим $\omega_{\text{соб}} >> \Omega_{\text{пр}}$ (см. рис. 9.4)
Уравнение движения:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{\text{вн}}, \qquad \vec{M}_{\text{вн}} = [\vec{r}m\vec{g}]\,.$$

Вектор $M_{\text{вн}}$ лежит в горизонтальной плоскости:

$$d\vec{L} || \vec{M}_{\text{вн}}, \qquad d\vec{L} \perp \vec{L}, \qquad |\vec{L}| = \text{const}.$$

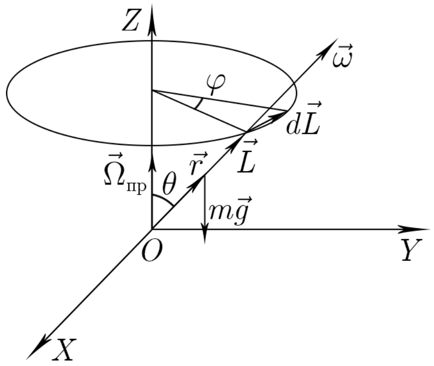

Рис. 9.4

Следовательно, вектор L вращается относительно оси z:

$$d\varphi = \frac{dL}{L\sin\theta} = \frac{M_{вн}dt}{L\sin\theta},$$

$$\Omega_{вн} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{M_{вн}}{L\sin\theta} \to M_{вн} = \Omega_{вн}L\sin\theta,$$

$$\vec{M}_{вн} = \left[\vec{\Omega}_{вн}\vec{L}\right] = \dot{\vec{L}}.$$

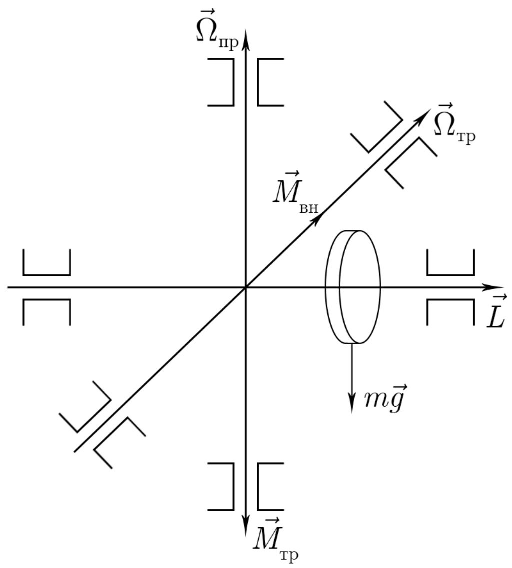

Рис. 9.5

Последнее уравнение описывает стационарную прецессию гироскопов, а вектора $M_{вн}$, L, $\Omega_{пр}$ образуют тройку векторов.

Рассмотрим трехстепенной гироскоп (рис. 9.5). При возникновении внешнего момента (от сил тяжести, например) гироскоп не начнет опускаться, а в соответствии с

$$\vec{M}_{вн} = \left[\vec{\Omega}_{вн}\vec{L}\right].$$

он начнет прецессировать относительно вертикальной оси Z. Но из-за начавшейся прецессии возникнет еще один внешний момент от сил трения $M_{тр}$

$$\vec{M}_{тр} = \left[\vec{\Omega}_{тр}\vec{L}\right].$$

Согласно формуле, $\Omega_{тр}$ будет направлена в ту же сторону что и $M_{вн}$, поэтому появится прецессия относительно оси X.