ЛЕКЦИЯ 10

ГИРОСКОП. КОЛЕБАНИЯ. ФИЗИЧЕСКИЙ МАЯТНИК

1. Гироскоп

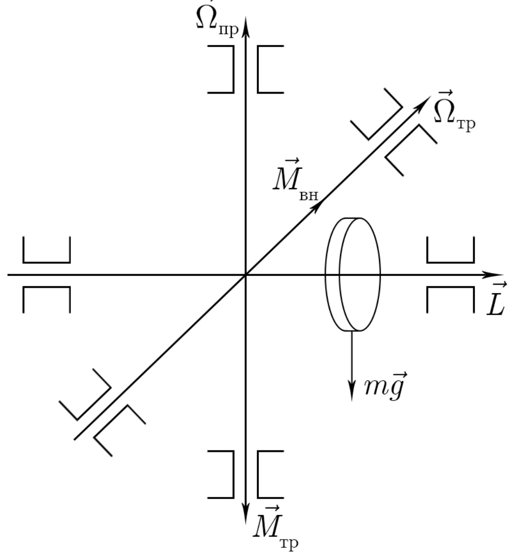

Рис. 10.1

Если к оси гироскопа подвесить грузик, то в первый момент времени ось немного опустится и начнет прецессировать относительно оси Z как показано на рис. 10.2.

Изображено затухающее движение — нутация. Это не стационарное движение. В описанных формулах нутация не учитывается, т. к. мы рассматривали установившееся движение.

Чем выше угловая скорость гироскопа, тем меньше нутация.

$$d\vec{L} = \vec{M}dt, \quad dL = Mdt = Ld\varphi, \quad d\varphi = \frac{Mdt}{L},$$

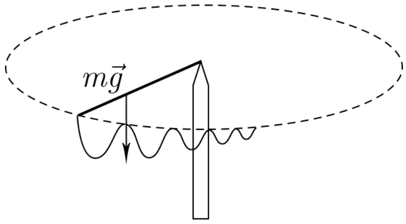

Рис. 10.2

$$\Omega_{\text{пр}} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{L},$$

$$\vec{M} = \left[\vec{\Omega}_{\text{пр}} \vec{L}\right] = \dot{\vec{L}}.$$

Но через некоторое время ось гироскопа все же наклоняется. Это связано возникновением трения и соответственно момента трения $M_{\text{тр}}$ в подшипниках вертикальной оси. Возникновение еще одного момента приводит к возникновению еще одной прецессии.

$$\left[\vec{\Omega}_{\text{тр}} \vec{L}\right] = \vec{M}_{\text{тр}}.$$

Рассмотрим гироскоп, ось вращения которого не перпендикулярна плоскости опоры (см. рис. 10.3).

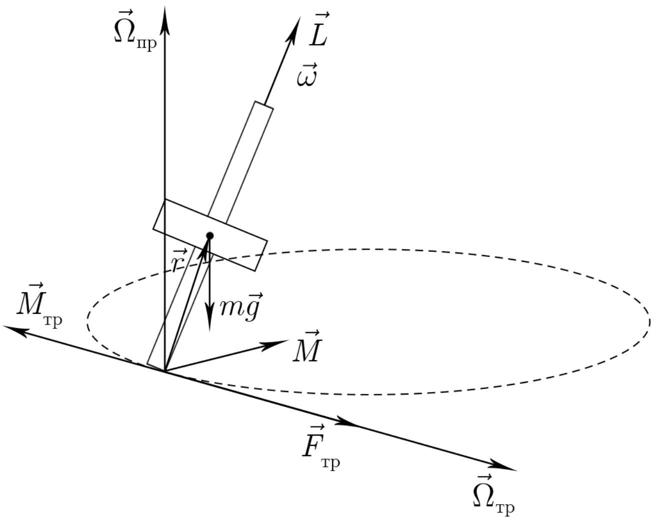

Рис. 10.3

$$\vec{M} = \left[\vec{\Omega}_{\text{пр}}\vec{L}\right],$$

$$\vec{M}_{\text{тр}} = \left[\vec{r}\vec{F}_{\text{тр}}\right] = \left[\vec{\Omega}_{\text{тр}}\vec{L}\right].$$

Момент сил трения направлен на уменьшение прецессии гироскопа, вследствие чего его ось «поднимается», и в результате становится перпендикулярной плоскости опоры.

Изобразим силы, действующие на гироскоп, который обегает контур (см. рис. 10.4).

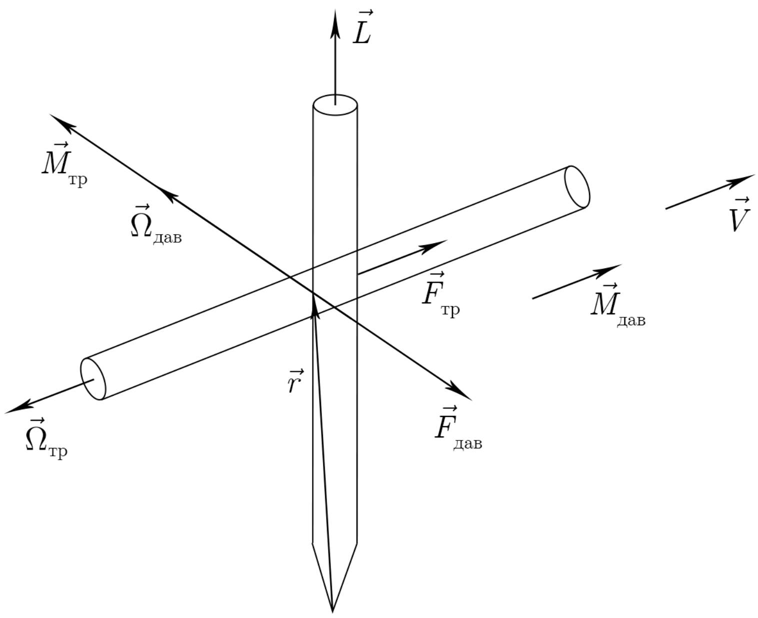

Рис. 10.4

Главное свойство гироскопа — сохранять заданное направление вращения. Это свойство очень активно используется в ракетостроении, где применяются гиростабилизированные платформы, которые задают положение осей и по которым можно следить за отклонением ракеты.

2. Колебания

Это наиболее распространенный вид движения в природе. Колебания имеют разную природу (механические, электрические колебания).

2.1. Физический маятник

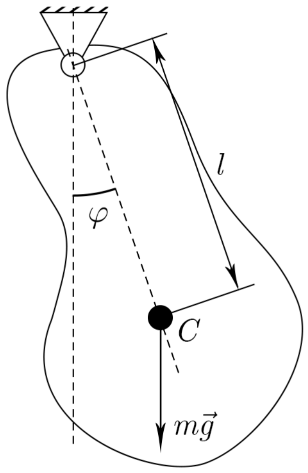

Рис. 10.5

Уравнение движения:

$$I\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi.$$

Перейдем к рассмотрению малых колебаний ($\sin\varphi \approx \varphi$). Уравнение движения малых колебаний:

$$I\ddot{\varphi} = -mgl\varphi,$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgl}{I}\varphi = 0.$$

Частота и период колебаний:

$$\omega^2 = \frac{mgl}{I}, \qquad \omega = \sqrt{\frac{mgl}{I}},$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}.$$

Решение:

$$\varphi(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t,$$

$$\dot{\varphi}(t) = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t,$$

$$\ddot{\varphi}(t) = -A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t,$$

$$\ddot{\varphi}(t) = -\omega^2\varphi(t).$$

где A и B — константы, зависящие от начальных условий.

Начальные условия бывают двух типов:

1. $t = 0: \ \varphi(0) = \varphi_0, \ \dot{\varphi}(0) = 0$

   Для заданных начальных условий решение имеет вид:

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos\omega t$$

2. $t = 0: \ \varphi(0) = 0, \ \dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0$

   Для заданных начальных условий решение имеет вид:

$$A = 0, \quad \dot{\varphi}_0 = B\omega, \quad B = \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega}$$

$$\varphi(t) = \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega} \sin\omega t$$

Получим уравнение колебаний из закона сохранения энергии. Будем считать, что трение отсутствует.

$$E = K + \Pi = \text{const}, \quad E = \frac{I\dot{\varphi}^2}{2} + mgl(1 - \cos\varphi),$$

$$(1 - \cos\varphi) = 2\sin^2\frac{\varphi}{2},$$

$$\sin\varphi \approx tg\varphi \approx \varphi\big|_{\varphi\to 0},$$

$$E = \frac{I\dot{\varphi}^2}{2} + mgl\frac{\varphi^2}{2} = \text{const}.$$

Продифференцируем полученное тождество:

$$\frac{I}{2}2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + \frac{mgl}{2}2\dot{\varphi}\varphi = 0,$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgl}{I}\varphi = 0.$$

2.2. Колебания с учетом вязкого трения

$$F_{\text{тр}} = \mu V = \mu\omega r = \mu\dot{\varphi}r,$$

$$M_{\text{тр}} = k\dot{\varphi}.$$

На рис. 10.6 показаны силы вязкого трения, действующие на физический маятник в месте крепления.

Уравнение колебаний:

$$I\ddot{\varphi} = -mgl\varphi - k\dot{\varphi},$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{k}{I}\dot{\varphi} + \frac{mgl}{I}\varphi = 0,$$

$$\frac{k}{I} = 2\delta, \qquad \omega_0^2 = \frac{mgl}{I},$$

$$\ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0.$$

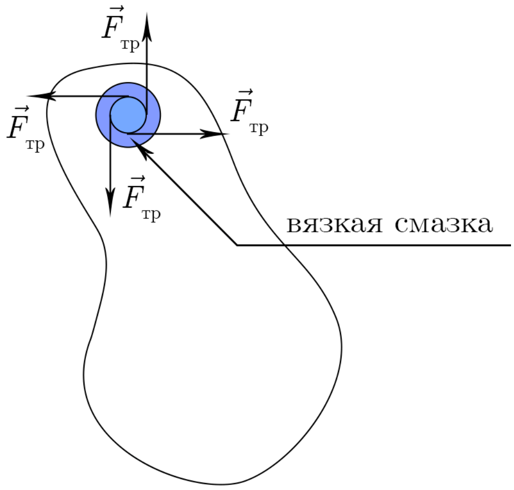

Рис. 10.6

где δ — коэффициент затухания.

Решение с учетом начальных условий 1-го типа:

$$\varphi\left(t\right) = Ae^{-\delta t}\cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}t\right),$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}.$$

Полученное решение представлено на рис. 10.7.

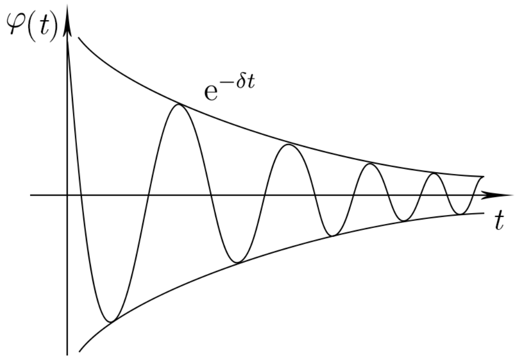

Рис. 10.7

2.3. Фазовая плоскость

Для удобства изображения колебаний применяют фазовую плоскость.

Незатухающие колебания:

$$P = \frac{\dot{\varphi}}{\omega_0}, \qquad \varphi\left(t\right) = A\cos(\omega_0 t - \varphi_0),$$

$$\frac{\dot{\varphi}(t)}{\omega_0} = A\sin(\omega_0 t - \varphi_0), \qquad \varphi^2\left(t\right) + \left(\frac{\dot{\varphi}(t)}{\omega_0}\right)^2 = 1.$$

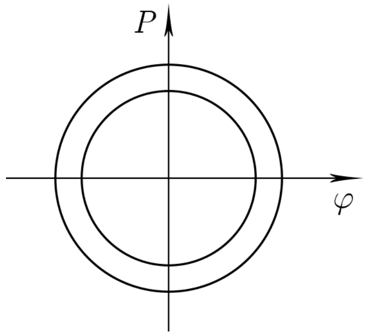

Рис. 10.8

Графиком является окружность (см. рис. 10.8). Ее диаметр зависит от амплитуды A. Состояние маятника оценивается по фазе, в которой он находится.

Затухающие колебания:

Для затухающих колебаний графиком является спираль, которая отображает уменьшение амплитуды колебаний с ростом числа периодов, т. е. затухание (см. рис. 10.9).

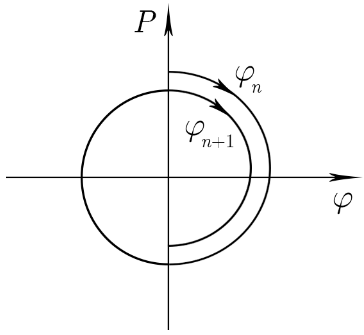

Рис. 10.9

2.4. Параметры затухающих колебаний

φ_n — амплитуда при n-периоде.

$\varphi_{\mathrm{n+1}}$ — амплитуда при $(n+1)$-периоде.

$$\frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n} = \mathrm{e}^{-\delta T},$$

$$T = t_{n+1} - t_n,$$

$$d = \delta T,$$

$$d = \ln\frac{\varphi_n}{\varphi_{n+1}}.$$

d — **логарифмический декремент затухания**.

τ — промежуток времени, за который амплитуда уменьшиться в е раз.

$$\mathrm{e}^{-\delta t} = \mathrm{e}^{-1} \to \tau = \frac{1}{\delta}.$$

N — число периодов за которое амплитуда упадет в е раз.

$$d = \delta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N}.$$

Q — **добротность**.

$$Q = \frac{\pi}{d} = \frac{\pi}{\delta T} = \frac{\pi\tau}{T} = \pi N.$$

Добротность характеризует качество колебательной системы, величину сил рассеивания данной системы. Если рассеивание очень большое, то добротность такой системы $\to 0$.