ЛЕКЦИЯ 12

НЕЗАТУХАЮЩИЕ И ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ. ОПИСАНИЕ ВОЛН. НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ. ВРАЩАЮЩИЕСЯ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

1. Колебания. Фазовый портрет

Рассмотрим такое понятие как **фазовый портрет**. Если точка совершает гармонические колебания, например математический маятник, то, как мы уже об этом говорили, можно рассмотреть так называемую фазовую плоскость (см. рис. 12.1).

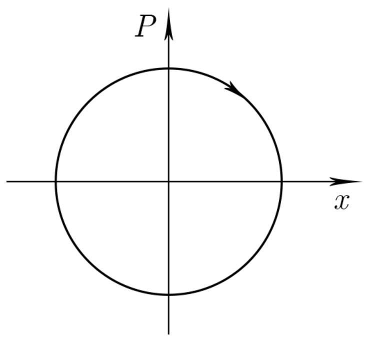

Рис. 12.1

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0),$$

$$\frac{\dot{x}}{\omega} = P = -A\sin\left(\omega t + \varphi_0, \right)$$

$$x^2 + \left(\frac{\dot{x}}{\omega}\right)^2 = 1.$$

Возбуждение колебаний силой периодического характера. Период вынужденных толчков будет отличаться от периода незатухающих колебаний.

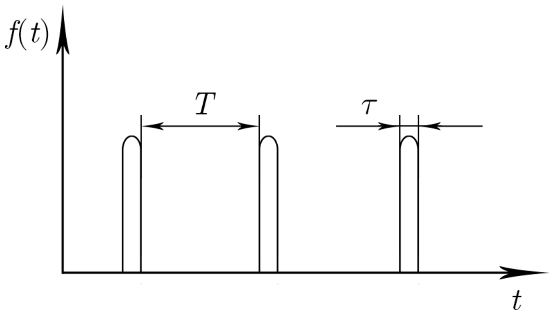

Рис. 12.2

$$P = \frac{\int\limits_t^{t+\tau} f\left(t\right)dt}{m\omega_0}.$$

Толкание начинается из состояния $x = 0$, $p = 0$. $T > T_0$, T_0 — период собственных колебаний.

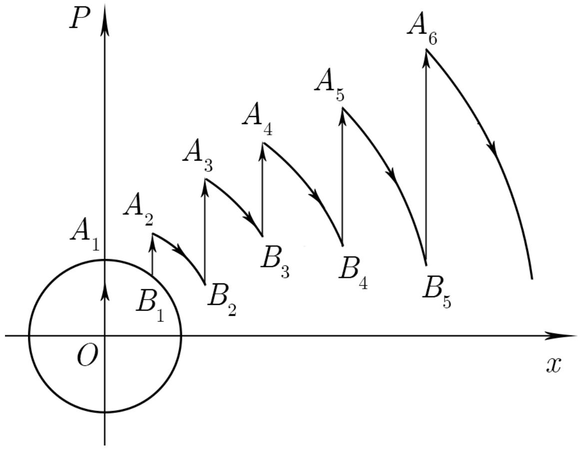

Рис. 12.3

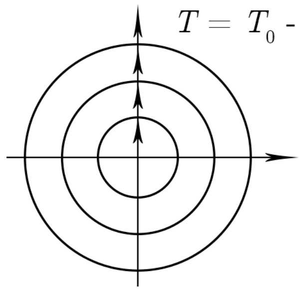

Рис. 12.4

Толчки маятника на затухающем осцилляторе.

$$x_n - x_{n-1} = A - Ae^{-\delta t} = A(1 - e^{-d}) \approx A\left(1 - 1 + d - \frac{d^2}{2} + ...\right) \approx Ad.$$

где d — **логарифмический декремент затухания**.

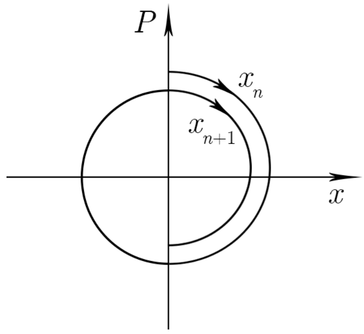

Рис. 12.5

Без толчков уменьшение колебаний происходит по геометрической прогрессии. Без трения был бы рост по алгебраической прогрессии (см. рис. 12.6).

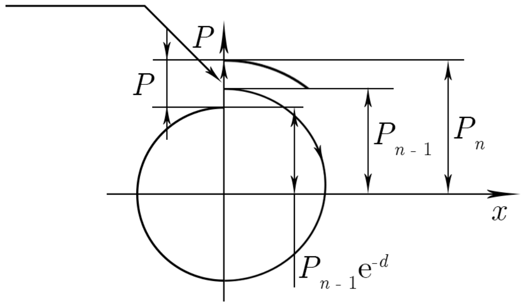

Рис. 12.6

$$P_n = P_{n-1}e^{-d} + P.$$

В P^* рост колебаний прекратится, они станут стационарными (см. рис. 12.7).

$$P_n = P_{n-1} = P^*,$$

$$P^* = \frac{P}{1 - e^{-d}},$$

$$d \ll 1 \to P^* \approx \frac{P}{d} = \frac{Q}{\pi}P.$$

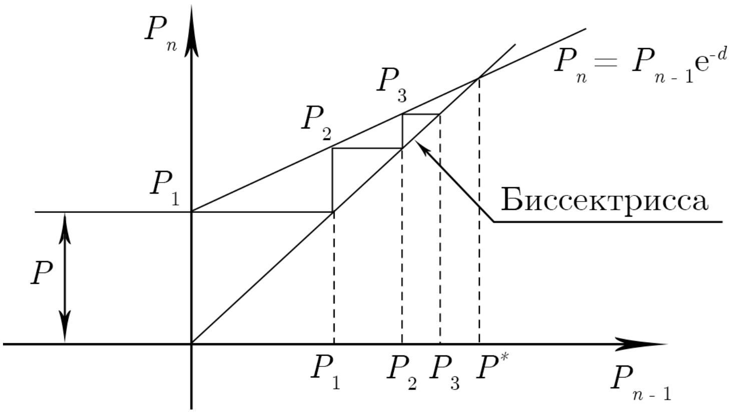

Рис. 12.7

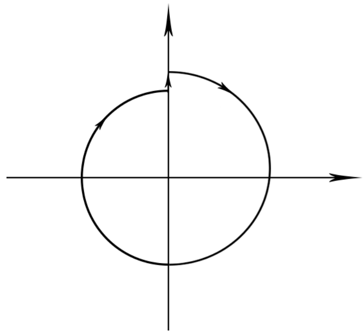

Рис. 12.8

Осциллограмма процесса имеет вид, показанный на рис. 12.9.

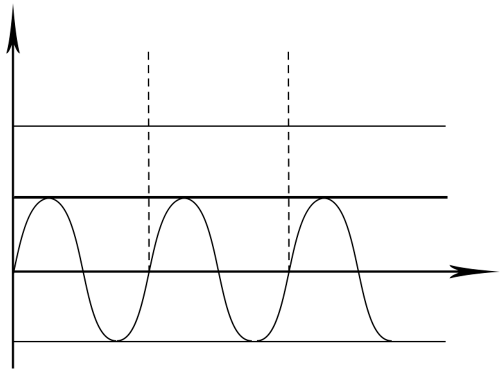

Рис. 12.9

В точках, помеченных пунктирной линией, происходят толчки.
Колебания незатухающие. Они не имеют больше синусоидальный характер.

2. Волны

Волны происходят при периодическом возбуждении колебаний с определенными параметрами (периодом, амплитудой). Волны, как и колебания, бывают поперечные и продольные. К поперечным волнам можно отнести волны на поверхности воды, электромагнитные волны; к продольным можно отнести звуковые волны.

Предположим, возмущение имеет следующий вид (оно распространяется со скоростью V) (см. рис. 12.10)

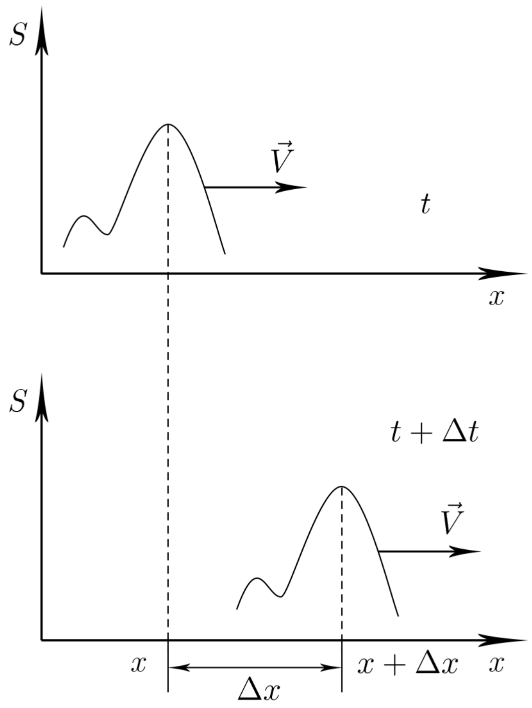

Рис. 12.10

Условие сохранение формы выполняется при следующих соотношениях:

$$S(x,t) = S(x+\Delta x, t+\Delta t),$$

$$S(x,t) = S\left(t - \frac{x}{V}\right),$$

$$t - \frac{x}{V} = t + \Delta t - \frac{x+\Delta x}{V} = t - \frac{x}{V} + \underbrace{\left(\Delta t - \frac{\Delta x}{V}\right)}_{=0} = t - \frac{x}{V}.$$

Тогда функция имеет вид

$$S(x,t) = A\cos(\omega t - kx) = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{k}{\omega}x\right)\right].$$

Фазовая скорость волны

$$V = \frac{\omega}{k}.$$

Частота колебаний

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Волновое число

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Длина волны — λ [м] (см. рис. 12.11).

Рассмотрим волну при постоянном времени, то есть зависимость колебаний от координаты при фиксированном времени; в другой момент времени гребень сместится, то есть волна подвижна во времени, что видно из уравнения $S(x,t)$ (см. рис. 12.12).

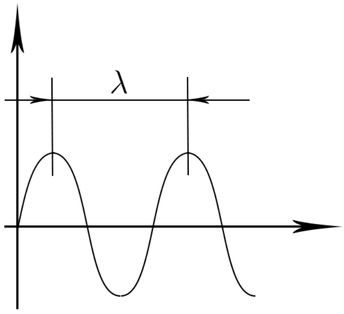

Рис. 12.11

$$k = \frac{\omega}{V} = \frac{2\pi}{\lambda}, \qquad V = \frac{\omega}{k} = \frac{\frac{2\pi}{T}}{\frac{2\pi}{\lambda}} = \frac{\lambda}{T}$$

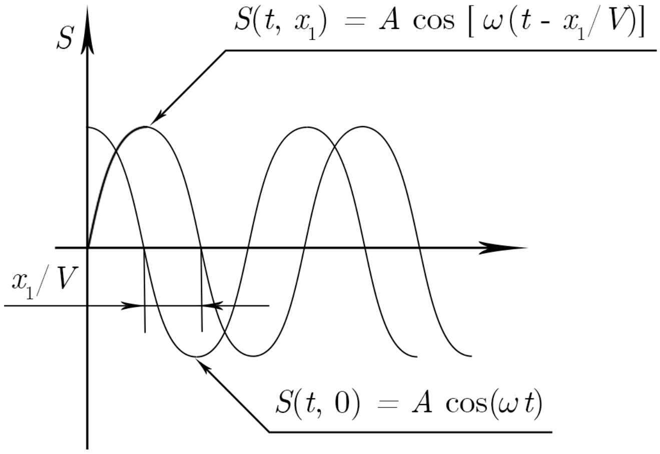

Рис. 12.12

Неинерциальные системы отсчета

Земля в действительности неинерциальная система, но во многих идеальных задачах принимается как ИСО.

В неподвижной лабораторной системе отсчета $O'X'Y'Z'$ расположена подвижная система отсчета $OXYZ$ (см. рис. 12.13):

$$\vec{g} + \vec{r} = \vec{r}', \qquad \frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{V}_0 = \text{const}$$

Преобразование Галилея:

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{V}_0 t, \quad t' = t, \quad \ddot{g} = 0$$

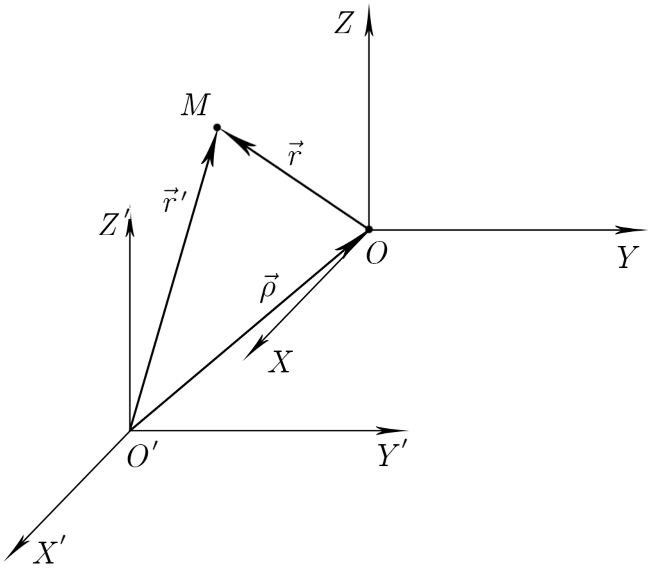

Рис. 12.13

Продифференцируем преобразования Галилея

$$\dot{\vec r}\,' = \dot{\vec r} + \vec V_{\text{о}}.$$

В итоге получаем:

$$\dot{\vec r}\,' = \vec V_{\text{абс}}, \qquad \dot{\vec r} = \vec V_{\text{отн}}, \qquad \vec V_{\text{о}} = \vec V_{\text{пер}}, \qquad \vec a_{\text{абс}} = \vec a_{\text{отн}}.$$

Рассмотрим задачу, в которой подвижная система отсчета (С. О.) движется поступательно и ускоренно. В этом случае правила сложения скоростей и ускорений будут выглядеть следующим образом:

$$\vec r\,' = \vec r + \vec\rho,$$
$$\vec V_{\text{абс}} = \vec V_{\text{отн}} + \vec V_{\text{пер}},$$
$$\vec a_{\text{абс}} = \vec a_{\text{отн}} + \vec a_{\text{пер}}.$$

Запишем 2-й закон Ньютона для:

1. Неподвижной С. О.:
$$\vec F = m\vec a_{\text{абс}} = m\left(\vec a_{\text{абс}} + \vec a_{\text{пер}}\right).$$

2. Подвижной С. О.:
$$m\vec a_{\text{отн}} = \vec F - m\vec a_{\text{пер}}.$$

Последний член — сила инерции:

$$\Phi = m\vec a_{\text{пер}}.$$

Рассмотрим систему K, которая движется произвольно (см. рис. 12.14).

$$|\vec i| = |\vec j| = |\vec k|$$

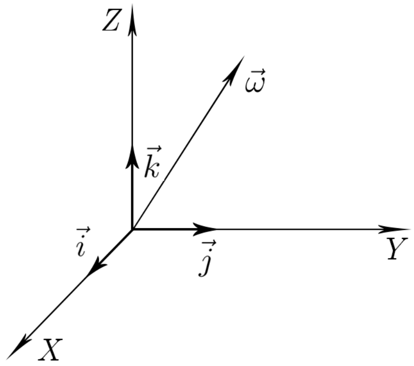

Рис. 12.14

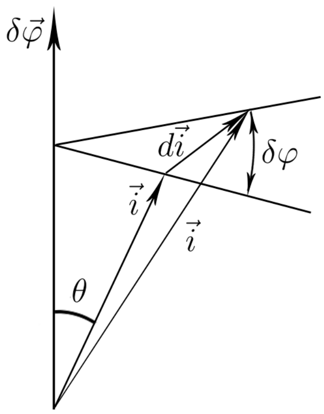

Рис. 12.15

Рассмотрим движение вектора i относительно вектора ω (рис. 12.15).

$$|d\vec{i}| = |\vec{i}|\sin\theta,$$

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \left[\frac{d\vec{\varphi}}{dt}\vec{i}\right] = [\vec{\omega}\vec{i}]\,.$$

Это справедливо и для векторов $\vec{j}$ и $\vec{k}$

$$\frac{d\vec{j}}{dt} = \left[\vec{\omega}\vec{j}\right],$$

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = \left[\vec{\omega}\vec{k}\right].$$

Эти соотношения необходимы, чтобы исследовать произвольное движение точки M в неинерциальной С. О.

Координаты точки M

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} + \left(x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt}\right) = \vec{V}_{\text{отн}} + [\vec{\omega}\vec{r}]\,.$$

Исходя из полученного соотношения, правило сложения скоростей будет иметь вид

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{\rho},$$

$$\dot{\vec{r}}' = \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{\rho}},$$

$$\vec{V}_{\text{абс}} = \vec{V}_{\text{O}} + \vec{V}_{\text{пер}} + [\vec{\omega}\vec{r}].$$

Продифференцируем и получим правило сложения ускорений:

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{a}_{\text{абс}} = \dot{\vec{V}}_{\text{O}} + \dot{\vec{V}}_{\text{отн}} + \left[\dot{\vec{\omega}}\vec{r}\right] + \left[\vec{\omega}\dot{\vec{r}}\right],$$

$$\dot{\vec{V}}_{\text{отн}} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} + \left(\dot{x}\dot{\vec{i}} + \dot{y}\dot{\vec{j}} + \dot{z}\dot{\vec{k}}\right),$$

$$\vec{a}_{\text{отн}} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k},$$

$$\dot{x}\dot{\vec{i}} + \dot{y}\dot{\vec{j}} + \dot{z}\dot{\vec{k}} = \left[\vec{\omega}\vec{V}_{\text{отн}}\right],$$

$$\dot{\vec{V}}_{\text{отн}} = \vec{a}_{\text{отн}} + \left[\vec{\omega}\vec{V}_{\text{отн}}\right],$$

$$\left[\vec{\omega}\dot{\vec{r}}\right] = \left[\vec{\omega}\left[\vec{V}_{\text{отн}} + \vec{\omega}\vec{r}\right]\right] = \left[\vec{\omega}\vec{V}_{\text{отн}}\right] + [\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{r}]],$$

$$[\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{r}]] = [\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{r}_{\perp}]].$$

Изобразим проекции вектора r (см. рис. 12.16).

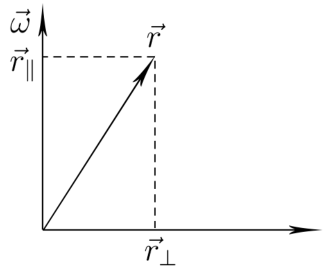

Рис. 12.16

Из рисунка видно, что

$$\left[\vec{\omega}\vec{r}_{\|}\right] = 0,$$

$$[\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{r}_{\perp}]] = \vec{\omega}(\vec{\omega}\vec{r}_{\perp}) - \vec{r}_{\perp}\omega^2,$$

$$\vec{\omega}(\vec{\omega}\vec{r}_{\perp}) = 0,$$

$$\left[\vec{\omega}\dot{\vec{r}}\right] = \left[\vec{\omega}\vec{V}_{\text{отн}}\right] - \vec{r}_{\perp}\omega^2.$$

Полное выражение для абсолютного ускорения произвольно движущейся системы:

$$\vec{a}_{\text{абс}} = \dot{\vec{V}}_{\text{o}} + \left[\dot{\vec{\omega}}\vec{r}\right] - \omega^2\vec{r} + 2\left[\vec{\omega}\vec{V}_{\text{отн}}\right] + \vec{a}_{\text{отн}}.$$