ЛЕКЦИЯ 13

НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЁТА. УПРУГИЕ ДЕФОРМАЦИИ

]Инерциальные и неинерциальные системы отсчета. Механика упругих тел и их деформация

1. Неинерциальные системы отсчёта

Неинерциальная произвольно движущаяся система — это система, которая испытывает ускоренное движение и вращение.

Выражение для абсолютного ускорения:

$$\vec{a}_{\text{абс}} = \dot{\vec{v}}_0 + [\dot{\vec{\omega}}, \vec{r}] - \omega^2 \vec{r}_\perp + 2[\vec{\omega}, \vec{v}_{\text{отн}}] + a_{\text{отн}}.$$

Произведение массы на абсолютное ускорение дает закон, по которому движется тело в лабораторной системе координат:

$$m\vec{a}_{\text{абс}} = \vec{F}.$$

Получим уравнение движения тела в относительной системе отсчета:

$$m\vec{a}_{\text{отн}} = \vec{F} - m\dot{\vec{v}}_0 - m[\dot{\vec{\omega}}, \vec{r}] + m\omega^2 \vec{r}_\perp + 2m[\vec{v}_{\text{отн}}, \vec{\omega}].$$

$-m\dot{\vec{v}}_0$ есть **сила инерции**, $-m[\dot{\vec{\omega}}, \vec{r}]$ — **сила инерции во вращающихся системах**, $m\omega^2\vec{r}_\perp$ — **центробежная сила**, $2m[\vec{v}_{\text{отн}}, \vec{\omega}]$ — **сила Кориолиса**. Эти силы существуют только в неинерциальных системах отсчета.

В качестве примера рассмотрим шарик на нитке, прикрепленной к вертикальному стержню (см. рис. 13.1).

Наблюдатель, находящийся в лабораторной системе отсчета, понимает, что шарик находится в таком положении из-за центробежной силы, полученной в результате суммарного воздействия силы тяжести и силы натяжения нити.

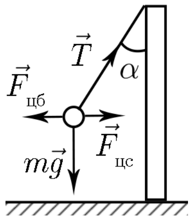

Рис. 13.1

Если перейти в систему, связанную с шариком, то будет непонятно, почему шарик находится в положении равновесия. Это объясняется добавлением центробежной силы, которая может быть только во вращающейся системе отсчета.

2. Потенциальная энергия центробежной силы

Поскольку центробежная сила является консервативной силой, так как зависит только от расстояния вращающего тела до оси вращения, то можно ввести понятие **потенциальной энергии** вращающего тела:

$$-\frac{dU_{\text{цб}}}{dr} = F_{\text{цб}} = m\omega^2 r,$$

$$U_{\text{цб}} = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2 + \text{const}.$$

Константу обычно полагают равной нулю, если отсчет ведётся от оси вращения.

Напоминаем, что в поле потенциальных сил совершенная работа определяется только начальными и конечными точками пути:

$$A = \Delta U_{\text{цб}}.$$

3. Поправка на вес тела из-за вращения планеты

Из-за вращения планеты, на поверхности которой находится тело массой m, нужно учитывать поправку, которую вносит вращение планеты (см. рис. 13.2). Рассмотим случай Земли.

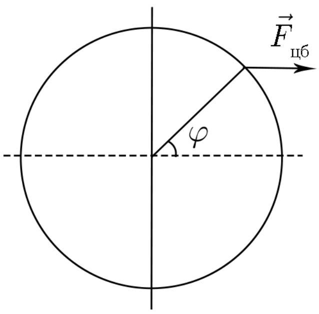

Рис. 13.2

Сила гравитации направлена к центру. Но из-за вращения Земли проявляет себя центробежная сила, так что результирующая сила будет направлена не к центру Земли. Оценим влияние этой силы:

$$a_{\text{цб}} = \Omega^2 R\cos\phi = \frac{(2\pi)^2\cdot 6,6\cdot 10^6}{(24\cdot 3600)^2}\cos\phi = 0,034\cos\phi.$$

4. Сила Кориолиса

Это сила возникает всегда, когда тело начинает двигаться в неинерциальной системе отсчета. Рассмотрим в качестве примера человека, сидящего на **скамье Жуковского**. Он находится в вращающейся системе отсчета. Раскидывая или сводя руки с гантелями, испытуемый может чувствовать действие силы Кориолиса, замедляющей или ускоряющей вращение.

Задача.

С высоты $H = 80$ м на широте $\phi = 45^\circ$ Земли было брошено тело вертикально вниз. Рассчитать отклонение тела от вертикали из-за силы Кориолиса.

Решение.

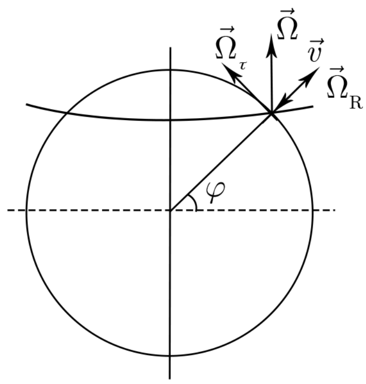

Рис. 13.3

Разложим вектор вращения Земли на радиальную и тангенциальную составляющие (см. рис. 13.3).

$$\Omega_\mathrm{R} = \Omega \sin\phi, \qquad \Omega_\tau = \Omega\cos\phi.$$

Благодаря наличию радиальной составляющей произойдёт отклонение тела на восток.

$$F_\mathrm{K} = 2gt\Omega\cos\phi.$$

Дважды проинтегрируем полученное соотношение.

$$S = \frac{1}{3}\omega g t^3 \cos\phi = 3 \text{ см}.$$

Поскольку существует компонента скорости, направленная на восток, то будет также иметь место движение на юг.

Заметим, что если бы тело было брошено вертикально вверх, то оно бы отклонилось на запад и на север.

Ещё одно из проявлений силы Кориолиса можно наблюдать в эксперименте с **маятником Фуко**.

Если маятник не вращают, то он колеблется в одной плоскости в силу закона сохранения момента импульса. Но из-за действия силы Кориолиса плоскость качания маятника будет смещаться.

Разложим вектор вращения Земли на радиальную и тангенциальную составляющие (см. рис. 13.4).

Тангенцальная компонента также может быть разложена на параллельную и перпендикулярную компоненты — $\Omega_\parallel$ (действует в плоскости качения) и $\Omega_\perp$ (направлена перпендикулярно плоскости качения) (см. рис. 13.5).

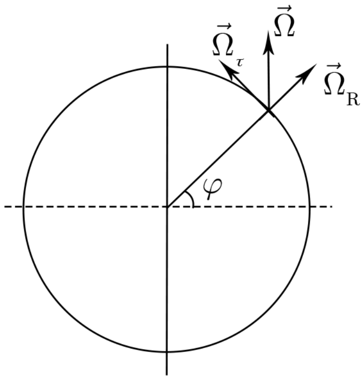

Рис. 13.4

Таким образом, помимо силы тяжести и силы натяжения нити на маятник будут действовать ещё три силы: $2m[\vec{v}, \vec{\Omega}_\perp]$, $2m[\vec{v}, \vec{\Omega}_\parallel]$, $2m[\vec{v}, \vec{\Omega}_\mathrm{R}]$. Рассмотрим влияние каждой из них на движение маятника.

$2m[\vec{v}, \vec{\Omega}_\perp]$ направлена по нити, и поэтому не дает вклад в поворот плоскости. $2m[\vec{v}, \vec{\Omega}_\parallel]$ дает вклад в поворот плоскости, но постоянно меняет свой знак при изменении фазы движения (от центра или к центру), и поэтому в среднем не оказывает никакого эффекта. $2m[\vec{v}, \vec{\Omega}_\mathrm{R}]$ стабильно поворачивает плоскость качания.

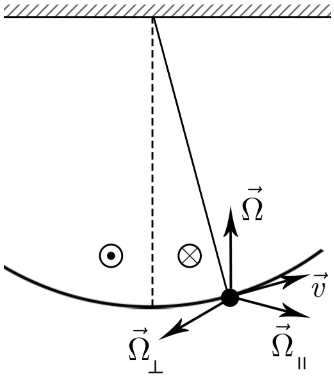

Рис. 13.5

Найдём период, с которым вращается плоскость качания маятника Фуко.

$$T_0 = \frac{2\pi l}{\Omega_\mathrm{R} l} = \frac{2\pi}{\Omega_\mathrm{R}} = \frac{2\pi}{\Omega_3 \sin\phi} = \frac{24}{\sin 56^\circ} = 28,9 \text{ часов (для Москвы)}.$$

Нью-Йорк: $\sin 41^\circ = 0,66$, $T = 36$ часов 45 минут.

Если маятник помещён на вращающийся диск (см. рис. 13.6), то в зависимости от начальных условий его конец рисует разные фигуры.

Например, если в начальный момент маятник был отпущен из точки A с нулевой скоростью, то в течение движения он вычерчивает примерно следующую фигуру (см. рис. **??**).

Если в в начальный момент маятник находится в центре и ему сообщили начальную скорость, то вычерчивается следующая фигура (см. рис. 13.7).

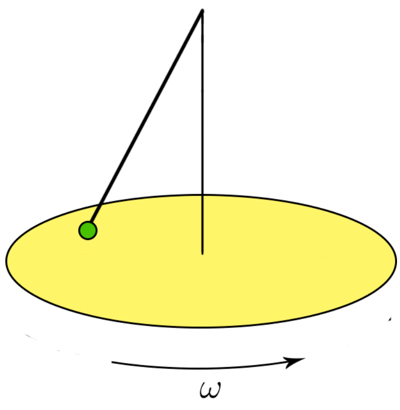

Рис. 13.6

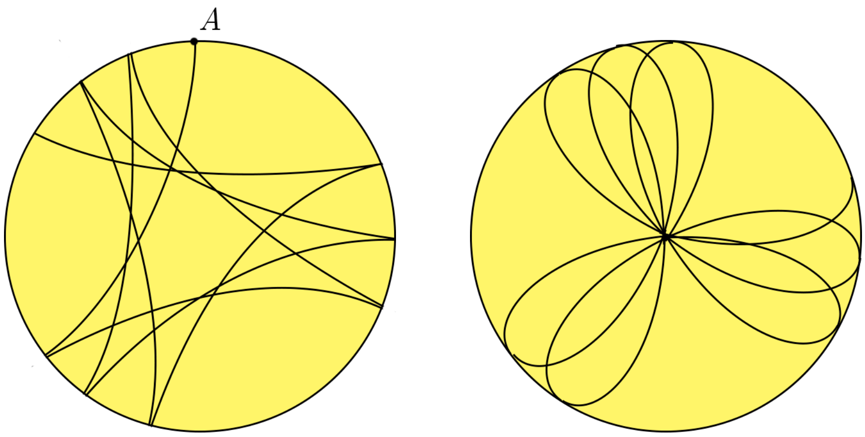

Рис. 13.7

5. Механика упругих тел. Закон Гука

Будем прикладывать к стержню силу F и откладывать ее на графике в зависимости от относительного удлинения стержня $\epsilon = \dfrac{\Delta l}{l}$ (см. рис. 13.8). По оси y отложим величину $T = \dfrac{F}{S}$ — натяжение.

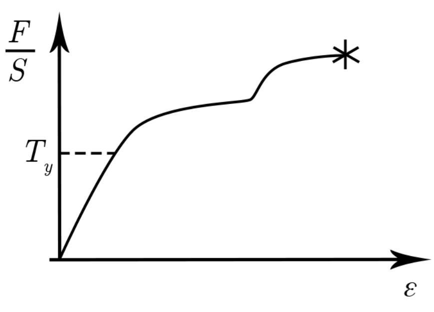

Рис. 13.8

При малых деформациях натяжение ведёт себя как линейная функция деформаций. Но после достижения какого-то значения $T_у$ наблюдается нелинейное поведение материала. Говорят, что при этом имеют место **пластические деформации**. Прикладывая все большую силу, можно добиться разрыва стержня.

Разгрузка стержня происходит следующим образом (см. рис. 13.9).

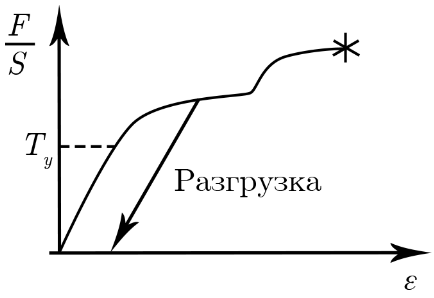

Рис. 13.9

При уменьшении натяжения до нуля будут убраны лишь упругие деформации, но не пластические.

В рамках данной лекции будем ограничиваться лишь упругими деформациями.

6. Модуль Юнга

Пусть длина стержня в недеформированном состоянии равна l_0. Запишем относительное удлинение с точностью до малых членов второго порядка:

$$\epsilon = \frac{l - \Delta l_0}{l} \approx \frac{\Delta l}{l}$$

$$T = E\frac{\Delta l}{l} = E\epsilon.$$

Коэффициент пропорциональности натяжения и удлинения называется **модулем Юнга**.

В общем случае эта зависимость имеет вид:

$$T = E\epsilon + A\epsilon^2 + B\epsilon^3 + ...$$

Узнаем, насколько удлинится стержень под действием собственного веса (см. рис. 13.10).

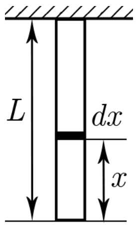

Рис. 13.10

Будем отсчитывать координату x от нижней части стержня. Рассмотрим диск толщиной dx, находящийся под действием силы F. Удлинение элемента dx:

$$dl = \frac{T}{E}dx.$$

$$F = \frac{mg}{L}x.$$

$$T(x) = \frac{mg}{LS}x,$$

$$\Delta L = \int\limits_0^{\Delta L} dl = \frac{mg}{LSE}\int\limits_0^{L} xdx = \frac{mgL}{2ES}.$$

Модуль Юнга обычно довольно велик. Его значение для стали: $E = 2\cdot 10^{11}$ Па. Значение $T_{\text{у}}$ для стали: $2\cdot 10^8$ Па.

Теперь вычислим **энергию упругой деформации** стержня. Пусть стержень растягивается с двух концов с силой $F = kx$ (см. рис. 13.11).

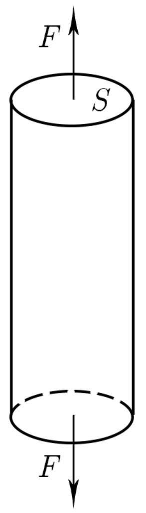

Рис. 13.11

Тогда энергия деформаций запишется как

$$U = \int\limits_0^{\Delta l} F(x)\,dx = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 = \frac{1}{2}F\Delta l.$$

Также важной характеристокой является **плотность энергии**:

$$u = \frac{U}{V} = \frac{F\Delta l}{2Sl} = \frac{1}{2}T\epsilon = \frac{T^2}{2\epsilon}.$$

7. Коэффициент Пуассона

При растяжении стержня будет наблюдаться изменение его поперечного сечения (особенно это заметно у резиновых жгутов). Для описания такого изменения формы служит **коэффициент Пуассона** μ.

$$\frac{\Delta a}{a} = -\mu\frac{\Delta l}{l} \quad \Rightarrow \quad \mu = -\frac{\frac{\Delta a}{a}}{\frac{\Delta l}{l}}.$$

Коэффициент Пуассона есть отношение изменения поперечного сечения к относительному изменению длины. Коэффициент Пуассона не может быть больше $\frac{1}{2}$.

Рассмотрим **всестороннее растяжение** параллелепипеда (см. рис. 13.12).

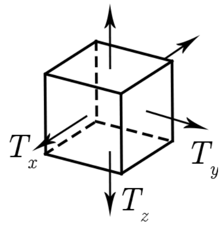

Рис. 13.12

Первичное изменение длины:

$$\frac{\Delta_1 x}{x} = \frac{T_x}{E}, \quad \frac{\Delta_1 y}{y} = \frac{T_y}{E}, \quad \frac{\Delta_1 z}{z} = \frac{T_z}{E}.$$

Из-за изменения длины под действием силы появится вторичное и третичное растяжение:

$$\frac{\Delta_2 x}{x} = -\mu\frac{T_y}{E}, \quad \frac{\Delta_3 x}{x} = -\mu\frac{T_z}{E},$$
$$\frac{\Delta_2 y}{y} = -\mu\frac{T_x}{E}, \quad \frac{\Delta_3 y}{y} = -\mu\frac{T_z}{E},$$
$$\frac{\Delta_2 z}{z} = -\mu\frac{T_y}{E}, \quad \frac{\Delta_3 z}{z} = -\mu\frac{T_x}{E}.$$

Для деформаций применим принцип суперпозиции:

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta_1 x}{x} + \frac{\Delta_2 x}{x} + \frac{\Delta_3 x}{x} \quad \Rightarrow \quad \epsilon_x = \frac{\Delta x}{x} = \frac{T_x}{E} - \frac{\mu}{E}(T_y + T_z),$$

$$\epsilon_y = \frac{\Delta y}{y} = \frac{T_y}{E} - \frac{\mu}{E}(T_x + T_z),$$

$$\epsilon_z = \frac{\Delta z}{z} = \frac{T_z}{E} - \frac{\mu}{E}(T_x + T_y).$$

Узнаем, сколько энергии накопилось при таком нагружении.

$$A_1 = \frac{1}{2}F_z\Delta x = \frac{1}{2}T_x yz\frac{x}{x}\Delta x = \frac{1}{2}T_x V\frac{\Delta x}{x},$$

$$A_2 = \frac{1}{2} T_y V \frac{\Delta y}{y},$$

$$A_3 = \frac{1}{2} T_z V \frac{\Delta z}{z}.$$

Плотность энергии:

$$u = \frac{U}{V} = \frac{A_1 + A_2 + A_3}{V} = \frac{1}{2}(T_x \epsilon_x + T_y \epsilon_y + T_z \epsilon_z) = \frac{1}{2E}(T_x^2 + T_y^2 + T_z^2 + 2\mu(T_x T_y + T_x T_z + T_y T_z)).$$