ЛЕКЦИЯ 14

ГИДРОДИНАМИКА. ИДЕАЛЬНАЯ ЖИДКОСТЬ. ВЯЗКОСТЬ

1. Деформация всестороннего растяжения

На прошлой лекции мы остановились на всестороннем растяжении. Мы рассматривали твердое тело, к которому были приложены силы (см. рис. 14.1), и получили, что относительная деформация всестороннего растяжения будет равна:

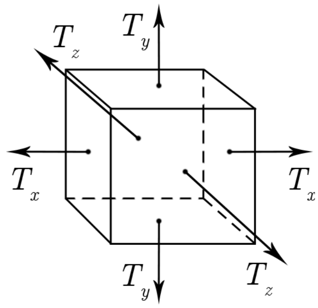

Рис. 14.1

$$\varepsilon_x = \frac{T_x}{E} - \frac{\mu}{E}(T_y + T_z),$$

$$\varepsilon_y = \frac{T_y}{E} - \frac{\mu}{E}(T_x + T_z),$$

$$\varepsilon_z = \frac{T_z}{E} - \frac{\mu}{E}(T_x + T_y).$$

Тогда деформацию по сжатию (равномерное всестороннее сжатие) при $P = -T_x =$

$= -T_y = -T_z$ можно записать

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \frac{-P}{E}(1 - 2\mu) = \frac{\Delta x}{x},$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta z}{z} = \frac{3\Delta x}{x} = \frac{-3P}{E}(1 - 2\mu) = \frac{-P}{K}.$$

То есть объем уменьшается при сжатии.

2. Модуль всестороннего сжатия

Используется вместо модулю Юнга, зависит от модуля Юнга и коэффициента Пуассона

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\mu)}.$$

Отсюда следует, что

$$\mu < \frac{1}{2}.$$

Плотность упругой энергии

$$U = \frac{3(1 - 2\mu)}{2E}P^2 = \frac{P}{2K} > 0.$$

3. Одностороннее сжатие

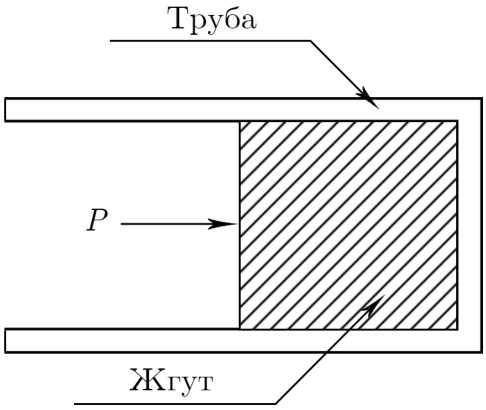

Рис. 14.2

Имеется жгут, который сжимается таким образом, что его поперечный размер не изменяется (с помощью жесткой трубы) (см. рис. 14.2). Следовательно

$$\Delta y = \Delta z = 0,$$

$$\Delta x = l.$$

$$\begin{cases} T_y - \mu(T_x + T_z) = 0, \\ T_z - \mu(T_x + T_y) = 0. \end{cases}$$

После подстановки

$$T_y - \mu(T_x + T_z) = T_y - \mu(T_x + \mu(T_x + T_z)) = 0.$$

Выразим T_y.

$$T_y(1-\mu^2) = T_x(\mu + \mu^2),$$

$$T_y = T_x \frac{\mu(1+\mu)}{1-\mu^2} = T_x \frac{\mu}{1-\mu} = T_z.$$

Общее удлинение:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l} = \frac{T_x}{E} - \mu(T_x \frac{\mu}{1-\mu} + T_x \frac{\mu}{1-\mu}) = \frac{T_x}{E}(1 - \frac{2\mu^2}{1-\mu}) = \frac{T_x}{E}\frac{1-\mu-2\mu^2}{1-\mu} = \frac{T_x}{E'},$$

где $E' = E\frac{1-\mu}{1-\mu-2\mu^2}$ — **приведенный модуль Юнга одностороннего сжатия**.

4. Скорость звука в стержнях

Рассмотрим стержень (брусок, длина которого много больше остальных двух размеров) по краю, которого наносится удар (см. рис. 14.3). При этом в стержне возникает упругое возмущение.

V — скорость вещества, c — скорость возмущения, m — масса деформированной части стержня за время t.

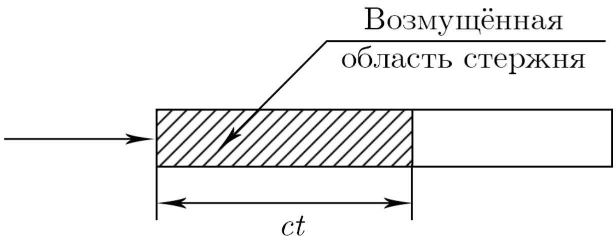

Рис. 14.3

Закон Ньютона:

$$\frac{d(mV)}{dt} = F,$$

$$m = \rho Sct,$$

$$F = PS.$$

Тогда при подстановке

$$\frac{d(\rho SctV)}{dt} = PS,$$

$$\rho cV = P,$$

$$P = \varepsilon E,$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{Vt}{ct} = \frac{V}{c},$$

$$\rho cV = \frac{V}{c}E,$$

где $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ — **стержневая скорость звука**.

В массиве поперечный стержень зажат, поэтому

$$c = \sqrt{\frac{E'}{\rho}}.$$

Стержневая длина волны:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{5 \cdot 10^3}{10^4} \approx 0.5 \text{ м}.$$

Стержневая скорость в железе (по справочнику): $c_{\text{ст}} = 5100$ м
Частота: $f = 10^4$ Гц.

5. Основы гидродинамики

5.1. Движение идеальной жидкости

Идеальная жидкость — это жидкость, в которой отсутствует вязкое трение.

Трубка тока — воображаемый объем движущейся жидкости, в котором частицы в одном сечении содержатся так же и в другом сечении, то есть частицы при движении

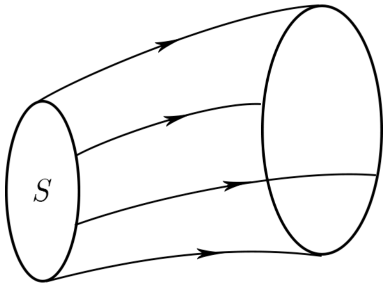

Рис. 14.4

переходят из одного положения в другое, и эти сечения вместе с линиями движения и образуют трубку тока (см. рис. 14.4).

За время dt через контур пройдет масса

$$dm = \rho V dt S.$$

Для стационарного сечения

$$\rho_1 V_1 S_1 = \rho_2 V_2 S_2$$

Формула так же верна при ламинарном течении газа.

Для несжимаемой жидкости верно $\rho_1 = \rho_2$, тогда имеем $V_1 S_1 = V_2 S_2$, то есть скорости в потоке обратно пропорциональны сечениям.

5.2. Уравнение Бернулли для идеальной жидкости

Рассмотрим течение жидкости: выделим трубу, рассмотрим 2 сечения в начальный момент и через некоторое время dt (см. рис. 14.5)

$$MN \to M'N', \ KL \to K'L'.$$

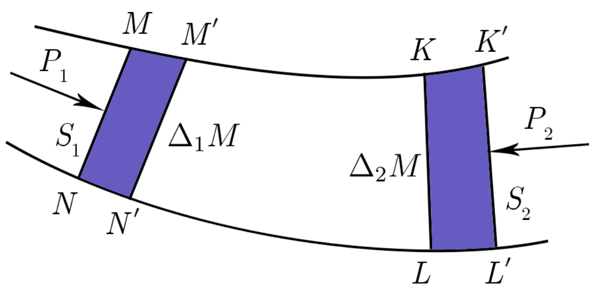

Рис. 14.5

В этом случае верно:

$$\Delta_1 m = \Delta_2 m = \Delta m.$$

Жидкость всегда двигается под действием разности давлений: $(P_1 - P_2)$.

Работа от силы слева вычисляется следующим образом:

$$A_1 = P_1 S_1 l_1 = P_1 \Delta V_1 = P_1 \frac{\Delta_1 m}{\rho_1}.$$

Аналогично, работа от силы справа:

$$A_2 = P_2 S_2 l_2 = P_2 \Delta V_2 = P_2 \frac{\Delta_2 m}{\rho_2}.$$

Тогда разность работ

$$A = A_1 - A_2 = [\frac{P_1}{\rho_1} - \frac{P_2}{\rho_2}]\Delta m.$$

Эта работа преобразовалась в энергию E (в том числе и в кинетическую энергию жидкости). ε_1, ε_2 — удельная энергия.

$$\Delta E = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\Delta m = (\frac{P_1}{\rho_1} - \frac{P_2}{\rho_2})\Delta m.$$

Получаем тогда

$$\varepsilon_2 + \frac{P_2}{\rho_2} = \varepsilon_1 + \frac{P_1}{\rho_1} = \text{const}.$$

Удельная энергия — это кинетическая энергия в единицу массы, потенциальная энергия в единицу массы и удельная внутренняя энергия:

$$\varepsilon = \frac{V^2}{2} + gh + u.$$

u для жидкости не существенно ($\Delta u \approx 0$), но весомо для газов;
gh не важно для газов, но важно для жидкости.
Константа Бернулли:

$$\frac{V^2}{2} + gh + \frac{P}{\rho} = \text{const}$$

5.3. Вязкая жидкость

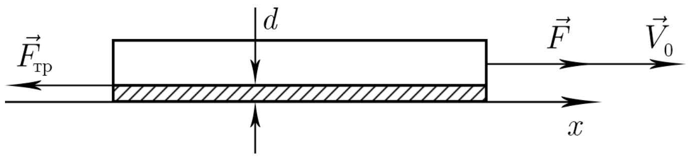

Рис. 14.6

На столе лежит пластинка. Между поверхностью стола и пластинкой заключена жидкость. Перемещаем пластинку вдоль поверхности. Этому препятствует сила трения (см. рис. 14.6). Равенство сил $F_{тр} = F$ обеспечивает постоянство скорости V_0:

$$F = \eta \frac{S V_0}{d},$$

где d — **коэффициент динамической вязкости**. То есть чем больше скорость, тем больше сила.

С системе СИ $\left[\frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \frac{\text{кг}}{\text{м с}}\right]$.

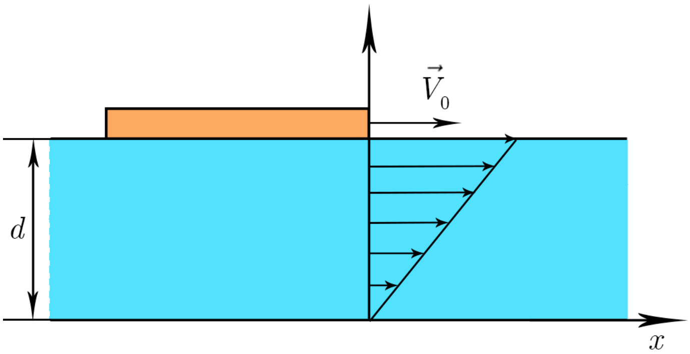

Рис. 14.7

В системе Гаусса (СГС) $[\frac{\text{г}}{\text{см с}} = 1\text{П (Пуаз)}]$. Пуазейль — ученый, занимавшийся вязким сопротивлением жидкости.

На рис. 14.7 изображено распределение скорости жидкости по сечению при ламинарном движении.

$$F_{\text{тр}} = -\eta S \frac{dV_x}{dz}.$$

Градиент скорости

$$\frac{dV_x}{dz} = \frac{V_0}{d}.$$

Рассмотрим трубу с текущей в ней вязкой жидкостью (см. рис. 14.8).

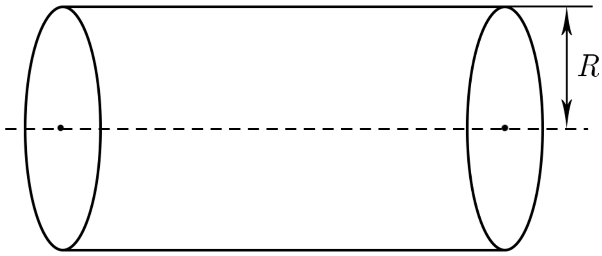

Рис. 14.8

Расход жидкости $[\frac{\text{м}^3}{\text{с}}]$.