

---

---

## ЛЕКЦИЯ 15

---

# ГИДРОДИНАМИКА. ВЯЗКАЯ ЖИДКОСТЬ

### 1. Вязкая жидкость

Рассмотрим движение вязкой жидкости. Под жидкостью может пониматься также и газ. Сила вязкого трения воздействует на движущуюся пластинку (см. рис. 15.1).

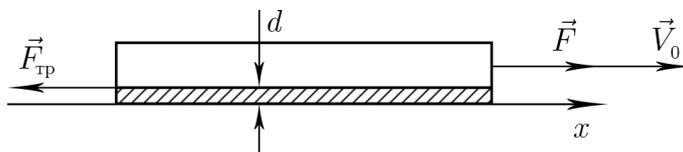


Рис. 15.1

Вязкую жидкость можно описать уравнениями Бернулли.  
Сила трения в вязкой жидкости:

$$F_{\text{тр}} = -\eta S \frac{dV_x}{dz}.$$

### 2. Формула Пуазейля

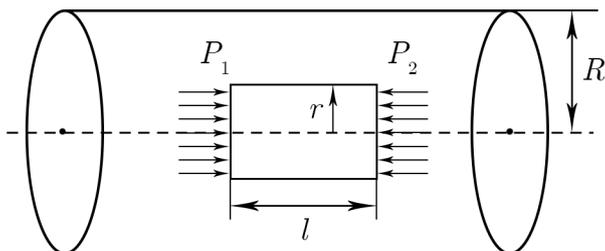


Рис. 15.2

**!** Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки.  
Следите за обновлениями на [lectoriy.mipt.ru](http://lectoriy.mipt.ru).

2

Рассмотрим круглую трубу радиуса  $R$ . Вырежем в ней цилиндр жидкости радиуса  $r$  (см. рис. 15.2). На поверхности цилиндра действуют давление и трение о соседние слои.

$$F_r = (2\pi r l) \eta \frac{dV}{dr}.$$

где  $\frac{dV}{dr}$  — градиент скорости трущихся частей.

Сила напора:  $(P_1 - P_2)\pi r^2$ .

$$(P_1 - P_2)\pi r^2 = -\eta(2\pi r l) \frac{dV}{dr},$$

$$dV = -\frac{P_1 - P_2}{2\eta l} r dr.$$

Интегрируем

$$V(r) = -\frac{P_1 - P_2}{2\eta l} \frac{r^2}{2} \Big|_R^r = \frac{P_1 - P_2}{4\eta l} (R^2 - r^2).$$

**!** Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой.  
Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на [pulsar@phystech.edu](mailto:pulsar@phystech.edu)

**!** Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на [lectoriy.mipt.ru](http://lectoriy.mipt.ru).

При  $r = R : V = 0$ , то есть на границе скорость нулевая, а при  $r = 0 : V_0 = V(0) = = \frac{P_1 - P_2}{4\eta l} R^2$  (см. рис. 15.3).

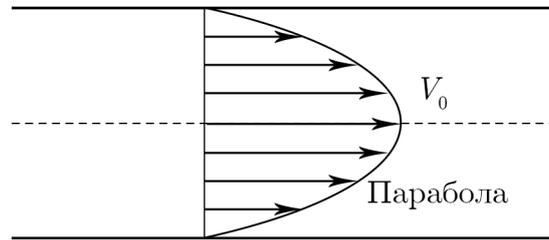


Рис. 15.3

$$V(r) = V_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right).$$

Расход:  $Q \left[ \frac{\text{м}^3}{\text{с}} \right]$  или массовый расход  $\dot{M} \left[ \frac{\text{кг}}{\text{с}} \right]$ .

$$dQ = 2\pi r dr V(r).$$

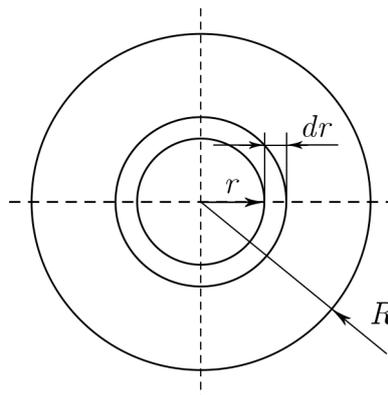


Рис. 15.4

Интегрируем и получаем **формулу Пуазейля**:

$$Q = \frac{P_1 - P_2}{4\eta l} \int_0^R (R^2 - r^2) 2\pi r dr = 2\pi \frac{P_1 - P_2}{4\eta l} \left[ R^2 \frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4} \right] = \frac{P_1 - P_2}{8\eta l} \pi R^4 = \pi R^2 \frac{V_0}{2},$$

$$V_0 = \frac{P_1 - P_2}{4\eta l} R^2.$$

Так же можно записать

$$Q = \pi R^2 \bar{V} = \pi R^2 \frac{V_0}{2}.$$

Средняя скорость потока жидкости в трубе

$$\bar{V} = \frac{V_0}{2}.$$

**!** Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на [pulsar@phystech.edu](mailto:pulsar@phystech.edu)

Массовый расход

$$\dot{M} = \rho Q = \rho \pi R^2 \frac{V_0}{2}.$$

Течение жидкости может быть 2-х видов: потенциальное и вихревое.

Кинетическая энергия, переносимая потоком за 1 с (**мощность потока**):

$$\begin{aligned} \dot{K} \left[ \frac{\text{Дж}}{\text{с}} \right] &= \int_0^R \frac{V^2}{2} \rho 2\pi r dr V(r) = \int_0^R \frac{V_0^3}{2} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right)^3 \rho 2\pi r dr = \\ &= V_0^3 \pi \rho \int_0^R \left( r - \frac{3r^3}{R^2} + \frac{3r^5}{R^4} - \frac{r^7}{R^6} \right) dr = \\ &= V_0^3 \pi \rho R^2 \left[ \frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{3}{6} - \frac{1}{8} \right] = \frac{V_0^3}{8} \pi \rho R^2 = \frac{2Q}{V_0} \rho \frac{V_0^3}{8} = Q \frac{V_0^2}{4} \rho = \frac{1}{4} \dot{M} V_0^2, \end{aligned}$$

где  $2\pi r dr V(r)$  — объем за 1 с.

Поток кинетической энергии

$$\dot{K} = \frac{1}{4} \dot{M} V_0^2 = \dot{M} \bar{V}^2.$$

Работа сил вязкого трения, препятствующей движению

$$\dot{A} = Q \frac{4\eta l V_0}{R^2}.$$

Работа за 1 с, производимая разностью давления ( $P_1 - P_2$ )

$$\begin{aligned} \dot{A} \left[ \frac{\text{Дж}}{\text{с}} \right] &= \int_0^R V dF(V) = \int_0^R V (P_1 - P_2) 2\pi r dr = \\ &= 2\pi (P_1 - P_2) \int_0^R V_0 \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) r dr = \\ &= 2\pi V_0 (P_1 - P_2) \left( \frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4R^2} \right) = \frac{\pi R^2}{2} V_0 (P_1 - P_2) = Q (P_1 - P_2) \\ \dot{A} &= Q (P_1 - P_2). \end{aligned}$$

Когда скорость от времени не зависит, тогда  $\dot{A} = \dot{A}_{\text{тр}}$ . Отсюда

$$\dot{A}_{\text{тр}} = -Q (P_1 - P_2) = -Q \frac{4\eta l V_0}{R^2} \left[ \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = \text{Вт} \right].$$

### 3. Ламинарный и турбулентный режимы

Ламинарное движение жидкости — движение без завихрений, не вязкое, когда вы-

**!** Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на [lectoriy.mipt.ru](http://lectoriy.mipt.ru).

полняется  $\dot{A}_{\text{тр}} \ll \dot{K}$ . В этом случае применима формула Бернулли.

$$\frac{\dot{K}}{|\dot{A}_{\text{тр}}|} \gg 1, \quad \frac{V_0 \rho R^2}{16\eta l} \gg 1.$$

где  $\eta$  — динамическая вязкость,  $\nu$  — кинематическая вязкость.

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}, \quad \frac{V_0 R^2}{16\nu l} \gg 1.$$

### Число Рейнольдса

$$Re = \frac{\rho V l}{\eta} = \frac{V l}{\nu},$$

где  $l$  — характерный размер.

1.  $Re < 1000$  — ламинарное течение, используется формула Пуазейля.
2. при  $1000 < Re < 2000$  — движение неустойчивое.
3. при  $Re > 2000$  — турбулентное течение жидкости по трубе.

**Физический смысл числа Рейнольдса** — отношение кинетической энергии в единицу времени к работе сил трения в единицу времени, то есть

$$Re \sim \frac{\dot{K}}{|\dot{A}_{\text{тр}}|}.$$

### Формула Стокса:

$$F = 6\pi\eta R V.$$

Формула справедлива только при малых числах Рейнольдса ( $Re \ll 1$ ).  
Если  $Re > 1$ , то  $F \sim V^2$ .

## 4. Вихрь

Циркуляция вектора  $\vec{V}$  по замкнутому контуру (см. рис. 15.5)

$$\Gamma = \oint_c (\vec{V} d\vec{l}).$$

Если  $\Gamma = 0$  — потенциальное движение (см. рис. 15.6).

**!** Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на [pulsar@phystech.edu](mailto:pulsar@phystech.edu)



Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на [lectoriy.mipt.ru](http://lectoriy.mipt.ru).

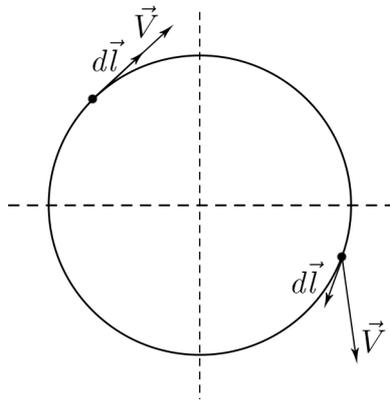
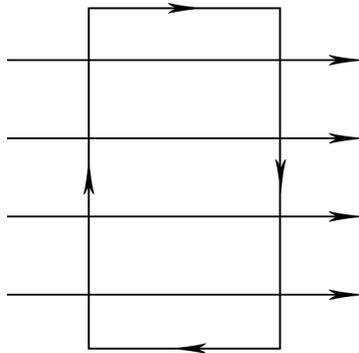


Рис. 15.5

Если  $\Gamma \neq 0$  — вихревое движение.



$$\Gamma = 0$$

Рис. 15.6

Если жидкость вращается, то вихрь или ротор (циркуляция, деленная на площадь) имеет вид

$$\Gamma = \oint_r (\vec{V} d\vec{l}) = 2\pi r V = 2\pi r \omega^2, \quad \frac{\Gamma}{\pi r^2} = 2\omega.$$

$$V_x = ay,$$

$$\Gamma = (x_2 - x_1) (V_2 - V_1) = a (x_2 - x_1) (y_2 - y_1),$$

$$S = (x_2 - x_1) (y_2 - y_1),$$

$$\frac{\Gamma}{S} = a.$$

То есть движение вязкой жидкости (с таким градиентом) по трубе всегда вихревое.

**Пограничный слой** — небольшой пристеночный слой (газ около крыла, 10–15 см), на котором скорость резко меняется от 0 до скорости потока газа.



Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на [pulsar@phystech.edu](mailto:pulsar@phystech.edu)

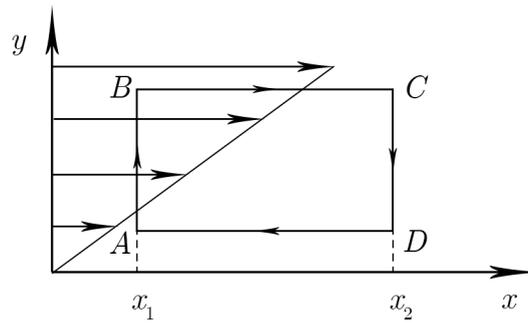


Рис. 15.7

Рассмотрим крыло в потоке газа (см. рис. 15.8 и 15.9).

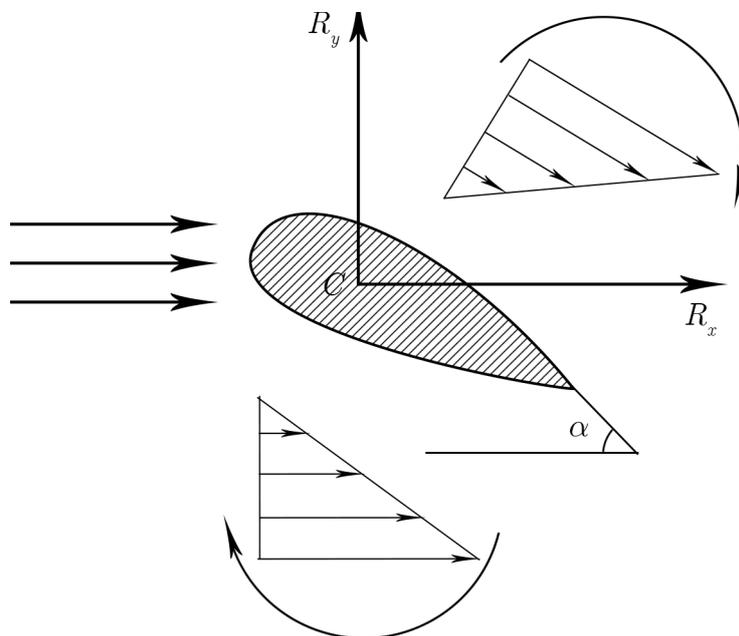


Рис. 15.8

где  $\alpha$  — угол атаки;  $R_y$  — подъемная сила.

На конце происходит отрыв потока, унося количество движения.

Таким образом появляется подъемная сила (см. рис. 15.10).

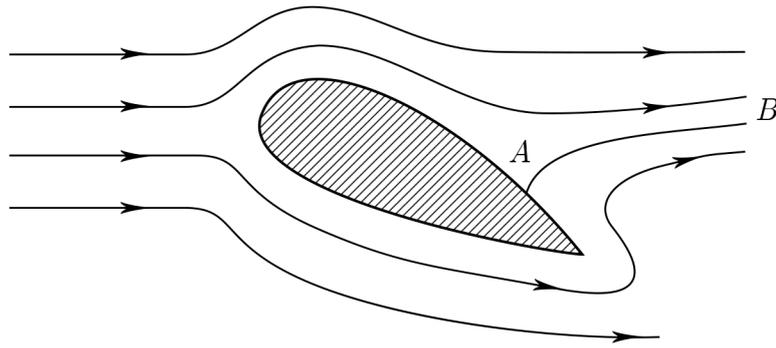


Рис. 15.9

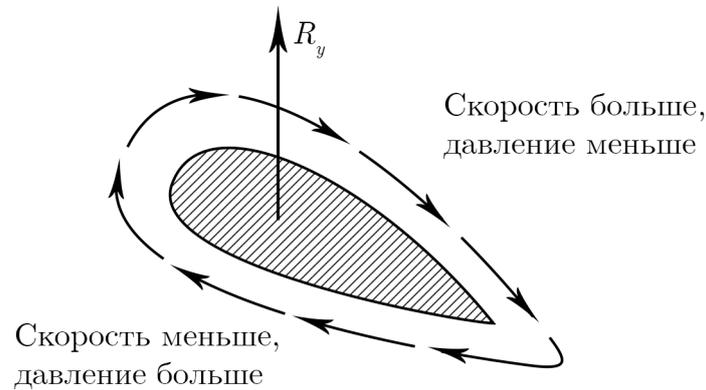


Рис. 15.10

## 5. Эффект Магнуса

Пусть цилиндр вращается по часовой стрелке без обдувания (см. рис. 15.11).

Возникает тонкая циркуляция против часовой стрелки, компенсирующая разницу в моменте импульса.

Теперь рассмотрим цилиндр, обдуваемый воздухом и вращающийся по часовой стрелке (см. рис. 15.12). Происходит ускоренное движение частиц воздуха.

Возникают вихри, направленные против часовой стрелки, которые уносятся воздухом. Тогда возникает циркуляция по часовой стрелке, что приводит к разнице давления: сверху давление понижено, снизу — повышенное. Из-за этого цилиндр поднимается





Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на [lectoriy.mipt.ru](http://lectoriy.mipt.ru).

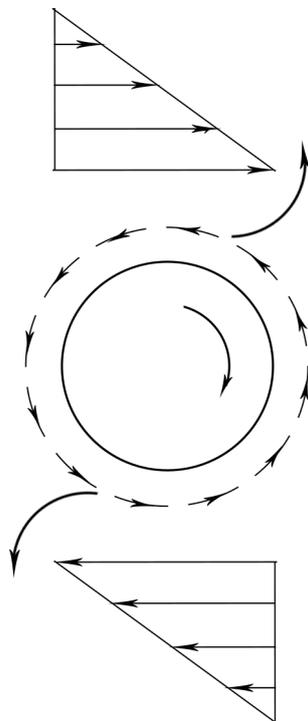


Рис. 15.11

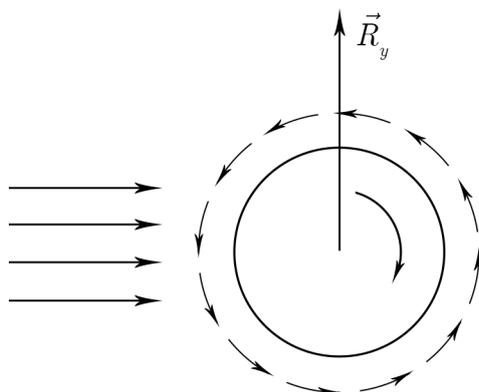


Рис. 15.12



Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на [pulsar@phystech.edu](mailto:pulsar@phystech.edu)