
ЛЕКЦИЯ 2

ВОЛНЫ ДЕ БРОЙЛЯ. УРАВНЕНИЕ ШРЁДИНГЕРА

$$\sim \frac{1}{\Delta l}$$

Для фотона справедливы следующие формулы:

$$E = \hbar\omega, \quad \vec{p} = \hbar\vec{k}.$$

Но мы знаем, что в зависимости от того, какой эксперимент мы проводим, свет ведет себя или как частица, или как волны, поэтому для световой волны можно переписать в следующем виде:

$$\left. \begin{array}{l} E = \hbar\omega, \\ \vec{p} = \hbar\vec{k}. \end{array} \right\} \psi = C e^{i(kx - \omega t)} = C e^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)}.$$

Принципиальное различие классической и квантовой механики состоит в том, что энергия ЭМ волны есть на самом деле вероятность обнаружить фотон в данной точке пространства.

Принц Луи де-Бройль (Prince Louis de Broglie) получил очень хорошее образование, но во время первой мировой войны ушел служить. Отвоевав шесть лет, вернулся и пошел работать к своему брату, который занимался рентгеновскими исследованиями. В 1923 году де-Бройль защитил диссертацию, которую по достоинству оценил лишь один Эйнштейн, а рецензенты ее просто не поняли, хотя и были выдающимися учеными.

Де-Бройль сказал, что если волна является частицами, то и частица должна быть волной. Если есть частица конечной массы, обладающая энергией

$$E = \frac{p^2}{2m}, \quad p = \sqrt{2mE},$$

то можно подставить эти значения в формулу

$$\psi = C e^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)}.$$

Это значит, что любая частица должна проявлять волновые свойства.



Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

В Венском университете даже провели опыты по дифракции тяжелой частицы Co^{60} и получили дифракционную картину (см. рис. 2.1). То есть она действительно обладает волновыми свойствами. А если есть частота, то есть и длина волны

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE}}$$

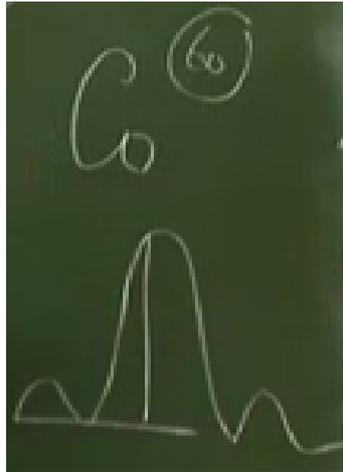


Рис. 2.1

Дэвиссон и Джермер исследовали интенсивность рассеяния электронов от угла при прохождении через пленки разных образцов. Всегда получалась одна и та же картина (см. рис. 2.2).

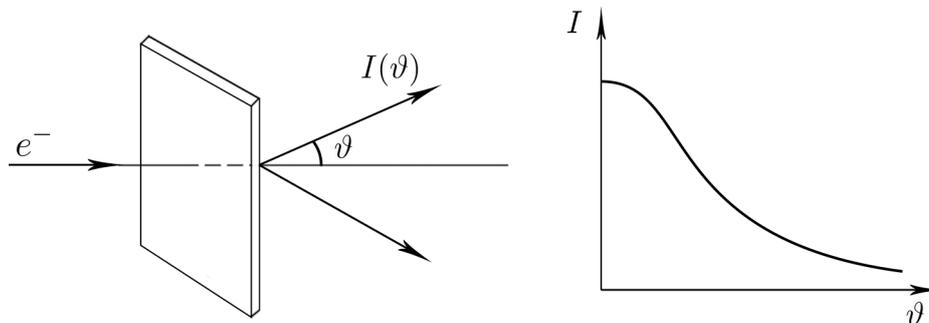


Рис. 2.2

Но однажды плёнка никеля разбилась. Её восстановили, так чтобы окись исчезла и повторили эксперимент. Новая плёнка никеля дала иной результат. Появился максимум интенсивности при определённом угле рассеяния (см. рис. 2.3). Оказалось, что этот угол соответствует брэгговскому рассеянию электронов на кристалле.

Но это все просто арифметика; модель, которая соответствует поведению частиц. А сами волны де-Бройля обнаружили относительно недавно, в 1993 году

Проводился следующий эксперимент. На поверхности монокристалла меди делали два дефекта — два примесных атома, нарушающих периодическую структуру (см. рис. 2.4). Свободные электроны относительно равномерно распределены по поверхности. Имеется



Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu

! Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

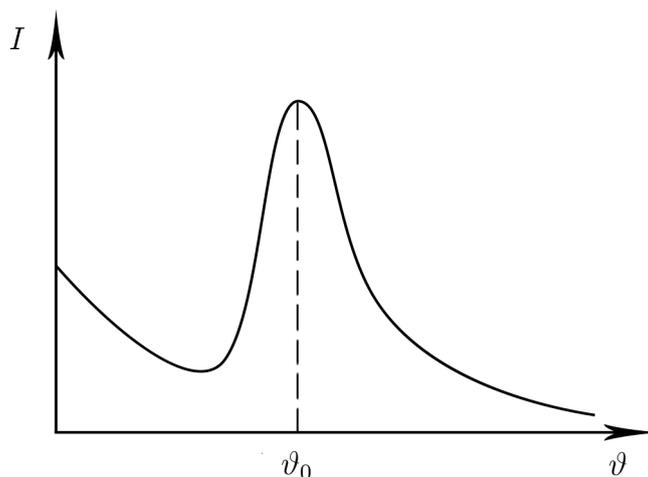


Рис. 2.3

некоторая электронная плотность. Изучали образец с помощью туннельного микроскопа. Оказалось, что электроны вблизи этих дефектов распределены как волны.

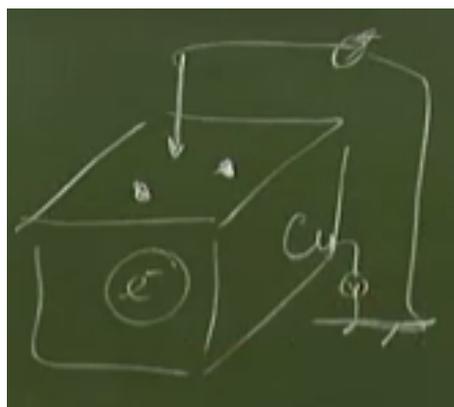


Рис. 2.4

Критерием для изучения квантовых свойств объекта является сравнение длины волны частицы и характерных размеров системы.

Возьмём атом водорода и посмотрим, нужно ли учитывать квантовые свойства для взаимодействия электрон-протон.

$$R_H \simeq 10^{-8} \text{ см}, \quad E_{\text{хар}} \simeq 10 \text{ эВ}, \quad 1 \text{ эВ} = 1,6 * 10^{-12} \text{ эрг},$$

$$\lambda_{\text{дБ}} = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{6 * 10^{-27}}{\sqrt{2 * 10^{-27} * 1,6 * 10^{-11}}} \simeq \frac{6}{1,7} * \frac{10^{-27}}{10^{-19}} \simeq 10^{-8} \text{ см}.$$

Длина волны де-Бройля в этом случае совпадает по порядку с размером атома, а значит квантовые свойства учитывать необходимо.

Теперь рассмотрим жидкий гелий. Он переходит в жидкое состояние при температуре $T = 4,2 \text{ К}$.

$$\rho = 0,15 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}, \quad E = k_B T \simeq 4 * 10^{-4} \text{ эВ},$$

! Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu

$$n = \frac{\rho}{m}, \quad R = n^{-1/3} \simeq 2 * 10^{-8} \text{ см}, \quad \lambda_{\text{дБ}} \simeq 5 * 10^{-8}.$$

Несмотря на то, что объект макроскопический, он является квантовым.

Частица и волна де-Бройля — это одно и то же!

Волна де-Бройля: $\psi = C e^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)}$ — свободной частице ставим в соответствие волну (волновую функцию).

А Эйнштейн сказал, что квадрат амплитуды волны — это вероятность обнаружить фотон в данном месте.

1. Вероятностная интерпретация волновой функции

Это понятие ввел Макс Борн. Что это значит?

Есть волновая функция и сопряженная ей: $\psi, \psi^*(r, t)$. Квадрат модуля — это и есть амплитуда волны:

$$|\psi|^2 = \psi^* \psi$$

Плотность вероятности обнаружения частицы, описываемой функцией ψ в заданной точке пространства в заданный момент времени:

$$dW(\vec{r}, t) = |\psi|^2 dV, \quad W(V, t) = \int_V |\psi|^2 dV.$$

Интересно узнать математические свойства волновой функции.

Поскольку частица где-то есть, то интеграл по всему пространству должен быть равен единице. Это называют нормировкой волновой функции:

1.

$$\int_{\infty} |\psi|^2 dV = 1.$$

Но это значит, что функция должна убывать быстрее, чем $1/r$, чтобы интеграл сходился.

Если у частицы есть два состояния, то выполняется принцип суперпозиции:

2.

$$\psi = C_1 \psi_1 + C_2 \psi_2.$$

Если мы хотим узнать, каким импульсом обладает частица, то мы тоже можем это сделать с помощью волновой функции

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(k) e^{ikx} dk.$$

Обратное преобразование Фурье:

$$\psi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x) e^{-ikx} dx.$$

! Конспект не проходил проф. редактуру, создан студентами и, возможно, содержит смысловые ошибки. Следите за обновлениями на lectoriy.mipt.ru.

Эта функция и определяет вероятность того, какой импульс у системы.

Поскольку мы перешли к вероятностному описанию, то нужно вводить вероятностные правила к описанию системы.

Среднее значение координаты (квантовое среднее координаты)

$$\langle x \rangle = \int x * |\psi|^2 dx \equiv \int \psi^* x \psi dx.$$

В квантовой физике от величин переходят к операторам, для которых выполняется:

$$\langle f \rangle = \int \psi^* \hat{f} \psi dx.$$

Для координаты — оператор совпадает с самой величиной

$$\hat{x} \equiv x, \quad f(x) \rightarrow \hat{f}(x) \equiv f(x).$$

Для описания поведения частицы, нужно знать координату и импульс частицы.

Для свободной частицы

$$\langle p \rangle \equiv p, \quad \psi = A e^{\frac{c}{\hbar}(px - Et)}.$$

Тогда из определения:

$$p = \langle p \rangle = \int A e^{-\frac{c}{\hbar}(px - Et)} \hat{p} A e^{+\frac{c}{\hbar}(px - Et)} dx.$$

Для того чтобы у нас возник импульс, нужно продифференцировать, то есть получится

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}, \quad \hat{p} = -i\hbar \nabla.$$

Теперь можно вычислить операторы кинетической и потенциальной энергии:

$$\hat{T} = \frac{\hat{p}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta, \quad \hat{U} \equiv U(x).$$

Но все эти выражения бессмысленны, если нет законов их изменения. Шредингер придумал уравнение для описания эволюции волновой функции.

Запишем энергию:

$$E = \hbar\omega$$

Для плоской волны запишем волновую функцию

$$\psi = A * \exp[i(kx - \omega t)]$$

Теперь рассмотрим производную

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\omega \psi, \quad \hbar\omega = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{1}{\psi} = E, \quad i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{T} \psi.$$

После взаимодействия

$$E = T + U = H, \quad T = \frac{p^2}{2m}, \quad U = U(x).$$

! Для подготовки к экзаменам пользуйтесь учебной литературой. Об обнаруженных неточностях и замечаниях просьба писать на pulsar@phystech.edu

Уравнение Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi$$

Но это уравнение очень сложное.

$$T = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}.$$

Если есть свободная частица, то

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} = -k_x^2 \psi$$

— **стационарное уравнение Шредингера**, которое описывает систему, не изменяющуюся во времени.

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + U\psi = \hat{H}\psi.$$

Есть еще одна вещь, отличающая микромир от макромира. Ее указал Гейзенберг. В макромире нет проблемы определения координаты.

Приведём мысленный эксперимент Гейзенберга. Облучим электрон светом и посмотрим в микроскоп. Изображение будет размазанным за счет дифракции, т. е. мы не можем точно определить координату электрона (см. рис. 2.5).

$$R\beta = \frac{\lambda}{\beta} \beta = \lambda \simeq \Delta x \sin \alpha, \quad \Delta x \sim \frac{\lambda}{\sin \alpha}.$$

С такой точностью мы можем определить координату.

Но при облучении электрона мы поменяли его импульс:

$$\Delta p_x \sim p_0 \sin \alpha = \frac{\hbar}{\lambda} \sin \alpha$$

Соотношение неопределенностей Гейзенберга:

$$\Delta p_x \Delta x \sim \hbar$$

То есть при измерении мы изменяем саму систему.

Были только мысленные эксперименты, но недавно провели реальный эксперимент по нахождению соотношения неопределенностей.

Этот эксперимент заключался в следующем. Существует ловушка для щелочных металлов — специальная конфигурация поля, такая что они удерживаются вместе в некотором пространстве порядка Δl (см. рис. 2.6).

Если понижать температуру, то образуется Бозе-конденсат. В таком состоянии у частиц $\Delta p = 0$. В этой ловушке сняли поле и атомы упали (с расстояния x) и начали разлетаться.

Измеряя расстояние l_1 , на который разлетелись атомы, можно определить, каким импульсом они обладали. Расстояние l_1 зависит от x , а следовательно от t . В Бозе-конденсате $\Delta p = 0$ только для бесконечной системы.

Измерения производили при разных размерах начальной системы (ловушки) Δl .

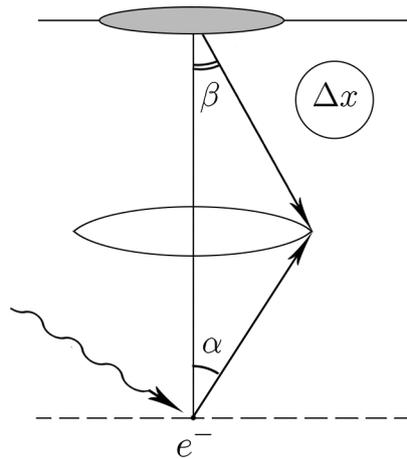


Рис. 2.5

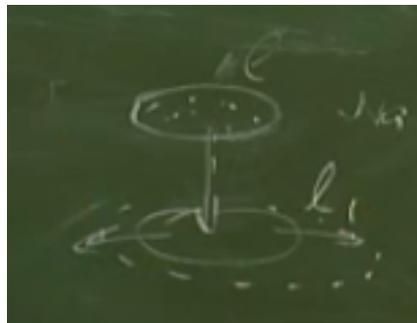


Рис. 2.6

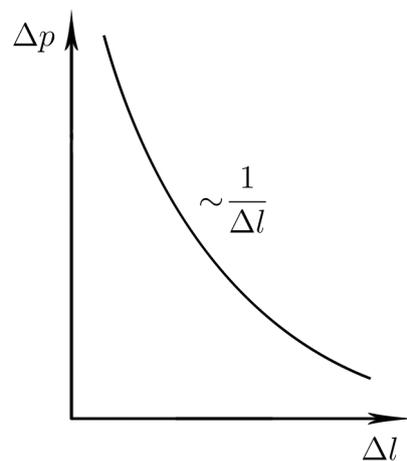


Рис. 2.7

Оказалось, что $\Delta p \Delta l \sim \hbar$. Зависимость Δp от Δl приведена на графике (см. рис. 2.7).

Нильс Бор ввел принцип дополнительности — *никогда нельзя знать точно сопряженные переменные*.

Провели эксперимент по рассеянию атомов натрия на дифракционной решетке (см. рис. 2.8). Они определяли положение атомов в плоскости и при этом в другой плоскости была интерференционная картина. Но когда они передвинулись и стали измерять положение в

другой плоскости, картина пропала.

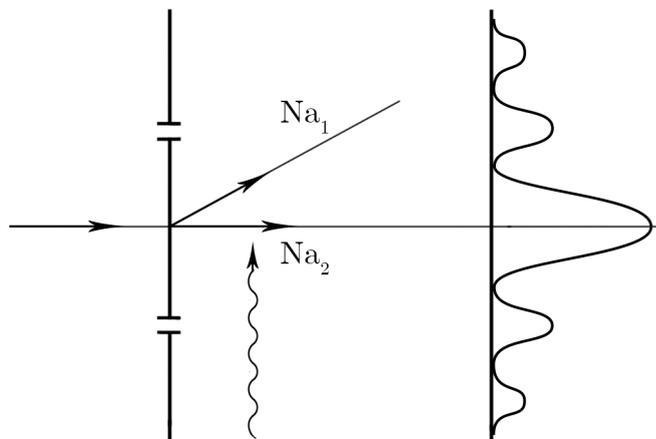


Рис. 2.8