ЛЕКЦИЯ 14

РАВНОВЕСНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ. ФОРМУЛА ПЛАНКА

В начале этого курса лекций рассматривались свойства света, то есть свойства фотонов. Также изучались законы взаимодействия света с веществом, фотоэффект и эффект Комптона.

Затем было рассмотрено испускание света микроскопическими системами — атомом, атомным ядром. Текущая лекция также будет посвящена свету, но который излучают не атомы или нагретые газы, а, например, солнце или электрическая лампочка.

Будем рассматривать **равновесное излучение**, то есть излучение абсолютно твердого тела. Это излучение имеет непрерывный спектр — дискретных линий в нем не существует.

Рассмотрим, например, натрий. При нагревании натрия на горелке Бунзена излучение будет иметь дискретный спектр.

Однако, при нагревании твердого тела, например, кристалла соли NaCl, излучение будет иметь непрерывный спектр.

Дело в том, что в случае натрия излучение происходит за счет перехода электронов из более высокого состояния в более низкое. В случае твердого тела NaCl причиной излучения также являются переходы электронов, однако электроны в этом случае не принадлежат какому-либо атому, то есть являются общими.

В металлах свободные электроны являются причиной возникновения электрического тока. У свободных электронов, не связанных с атомами, дискретного спектра не может быть, поэтому они излучают непрерывный спектр.

Рассмотрим более подробно природу и законы излучения твердого тела. Изучение теплового излучения началось с работ Кирхгофа в 1859 году. Кирхгоф обратил внимание, что излучение суть тепло, поэтому к нему могут быть применены законы термодинамики (тепловые законы).

Работы Кирхгофа подтолкнули других ученых к изучению спектров излучения. Зависимость плотности излучения твердого тела ρ_ω от частоты ω представлена на рисунке 14.1.

Из этого графика можно заключить, что существует максимум спектрального из-

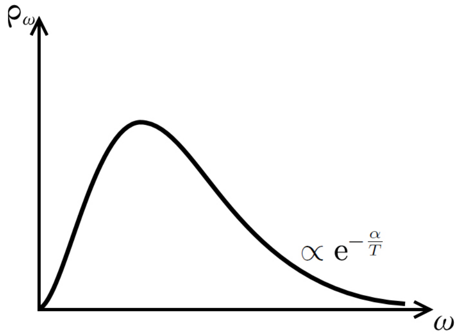

Рис. 14.1

лучения, который сдвигается в сторону больших частот при увеличении температуры. Было отмечено, что при больших частотах ω

$$\rho_\omega(\omega) \sim e^{-\frac{\alpha}{T}}\,.$$

В начале XX века было экспериментально получено, что на рисунке 14.1 участок функции $\rho_\omega(\omega)$ при малых частотах не соответствует формуле, полученной Вином. Было получено, что

$$\rho_\omega(\omega) \xrightarrow{\omega\to 0} \omega^2,$$

при малых частотах ω.

Макс Планк смог получить формулу равновесного излучения, описав закон $\rho_\omega(\omega)$. Он пришел к выводу, что излучение и поглощение света происходит только квантами (фотонами), энергия которых определяется следующим образом:

$$E = \hbar\omega, \tag{14.1}$$

где $\hbar$ — приведенная постоянна Планка:

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}.$$

Только введя дискретность в процессы излучения и поглощения света, Макс Планк смог получить и объяснить формулу для равновесного теплового излучения.

Прежде чем получить формулу Планка, произведем предварительные математические выкладки. Квантование Бора имеет следующий вид:

$$pr = nh, \tag{14.2}$$

то есть импульс имеет дискретную природу и кратен постоянной Планка.

Это означает, что в шестимерном фазовом пространстве

$$\Gamma = \{p, x\}$$

состояния являются дискретными: каждой частице в фазовом пространстве соответствует некоторый ненулевой фазовый объем.

В классической механике это не так: положение частицы в пространстве и ее импульс точно определены. Следовательно, в классической механике в фазовом пространстве частице всегда соответствует некоторая точка. Правило квантования Бора – Зоммерфельда (14.2) в развернутом виде записывается следующим образом:

$$\oint p\,dr = nh = n \cdot 2\pi\hbar.$$

Таким образом, по каждой координате дискретность составляет $2\pi\hbar$ и, следовательно, объем, который занимает частица в фазовом пространстве, определяется следующим образом:

$$\Delta p = (2\pi\hbar)^3. \tag{14.3}$$

В отличие от соотношения неопределенностей, представляющего собой неравенство, это равенство является точным: одному состоянию в точности соответствует фазовый объем (14.3). Напомним, что состояние любой системы характеризуется значением импульса и координаты.

Полное число состояний определяется следующим образом:

$$N = (2J+1) \cdot \frac{\Gamma}{(2\pi\hbar)^3}, \tag{14.4}$$

где $2J+1$ — вырождение по импульсу (мультиплетное состояние),

Γ — фазовый объем.

Плотность состояний определяет число состояний в интервале энергии:

$$g(E) = \frac{dN}{dE} = \frac{dN}{dp}\frac{dp}{dE}, \tag{14.5}$$

где $\frac{dp}{dE}$ — закон дисперсии для данной системы.

Для свободной частицы закон дисперсии имеет квадратичный характер:

$$E = \frac{p^2}{2m}.$$

Подставляя формулу для полного числа состояний (14.4) в закон дисперсии (14.5), получим, при условии что максимальный импульса равен p:

$$g(E) = (2J+1)\frac{d}{dp}\left(\frac{4\pi p^3}{3(2\pi\hbar)^3} \cdot V\right)\frac{dp}{dE} = (2J+1)\frac{3\pi p^2}{(2\pi\hbar)^3}V\frac{dp}{dE}, \tag{14.6}$$

где V — координационный объем.

Для фотонов закон дисперсии и мультиплетность определяются следующим образом:

$$E = pc, \qquad 2J+1 = 2,$$

поскольку у фотона существует только две возможные поляризации.

Из закона дисперсии для фотонов, выразив импульс, получим:

$$p = \frac{E}{c} \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{dE} = \frac{1}{c}.$$

Плотность состояний (14.6) в этом случае примет вид:

$$g(E) = 2\frac{4\pi p^2}{8\pi^3\hbar^2} \cdot V\frac{1}{c} = \frac{p^2}{\pi^2\hbar^3}\frac{V}{c} = V \cdot \frac{E^2}{\pi^2\hbar^3 c^3}.$$

В частотном виде, согласно (14.1), это выражение примет следующий вид:

$$g(\omega) = V \cdot \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega. \tag{14.7}$$

Таким образом, для безмассовых частиц плотность состояний пропорциональна ω^2. Зависимость (14.7) представлена на рисунке 14.2.

Для частиц, обладающих массой, в нерелятивистском случае

$$E = \frac{p^2}{2m} \quad \Rightarrow \quad dE = \frac{p}{m}dp$$

и, следовательно, получим закон дисперсии для свободной частицы, обладающей ненулевой массой:

$$\frac{dE}{dp} = \frac{p}{m} \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{dE} = \frac{m}{p} = \frac{m}{\sqrt{2mE}} = \sqrt{\frac{m}{2E}}.$$

В этом случае плотность состояний (14.6) окажется равной:

$$g(E) = (2J+1)\frac{4\pi p^2}{(2\pi\hbar)^3}V\frac{dp}{dE} = (2J+1)\frac{4\pi \cdot 2mE}{8\pi^3\hbar^3}V \cdot \sqrt{\frac{m}{2E}} = (2J+1)\frac{m^{3/2}E^{1/2}}{\sqrt{2}\pi^2\hbar^3}V \propto \sqrt{E}.$$

Полученная зависимость для

$$m \neq 0$$

представлена на рисунке 14.2.

Таким образом, плотность состояний для безмассовых частиц определяется следующим образом:

$$g(\omega)d\omega = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} V d\omega.$$

Рассмотрим некоторую теплоизолированную сферу, нагретую до температуры T (см. рис. 14.3). Если сделать небольшое отверстие на поверхности сферы, то спектр наблюдаемого излучения будет иметь вид как на рисунке 14.4, то есть соответствовать спектру абсолютно черного тела.

Это означает, что из отверстия в сфере будет «вылетать» фотоны. Пусть в некоторой точке A на внутренней поверхности сферы испускается фотон, который затем поглощается в точке B на внутренней поверхности сферы.

Затем из точки B излучается другой фотон, поглощающийся затем в точке C на поверхности сферы, и так далее. Этот механизм позволяет существовать равновесию между испускаемым и поглощаемым излучением.

Нелинейных процессов не наблюдается в том смысле, что изменения частицы при излучении не наблюдается.

Из рисунка 14.4 видно, что спектр фотонов непрерывный. Фотоны это частицы, следовательно, на каждой частоте имеется некоторое число n_ω фотонов:

$$\omega \longrightarrow n_\omega.$$

Можно сказать, что внутри сферического объема 14.3 существуют гармонические осцилляторы. Потенциал гармонического осциллятора имеет квадратичный вид (см. рис. 14.4).

Стационарные состояния гармонического осциллятора равноудалены друг от друга на расстояние

$$\Delta E = \hbar\omega,$$

и, соответственно, n-ому состоянию соответствует энергия

$$E \simeq n\hbar\omega.$$

Таким образом, можно сказать, что гармонический осциллятор, имеющий n-ый уровень возбуждения, соответствует тому, что внутри теплоизолированной сферы существует ровно n фотонов с частотой ω.

Следовательно, излучение в этом случае можно заменить бесконечно большим числом осцилляторов в выделенном объеме, каждый из которых возбужден до некоторого n_i-ого уровня энергии.

Энергия гармонического осциллятора E определяется следующим образом:

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right).$$

Нахождение плотности излучения на частоте ω сводится, таким образом, к отысканию числа фотонов с частотой ω при заданной температуре T.

При нагревании осциллятора до температуры T может быт возбужден любой уровень энергии. Следовательно, будет наблюдаться больцмановское распределение по уровням энергии.

Найдем среднюю энергию осциллятора:

$$\langle E\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \cdot E_n,$$

где E_n — энергия n-ого уровня,

w_n — вероятность нахождения осциллятора в данном состоянии.

Вероятность того, что при данной температуре T возбуждается n-ый уровень, имеет следующий вид:

$$w_n \propto \exp\left\{\left(-\frac{E_n}{kT}\right)\right\}.$$

Чтобы найти плотность состояний ρ_ω, необходимо произвести суммирование по всем осцилляторам. Средняя энергия одного осциллятора с частотой ω имеет следующий вид:

$$\langle E\rangle_{осц} = \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} E_n \, \mathrm{e}^{-\frac{E_n}{kT}}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{E_n}{kT}}}, \tag{14.8}$$

где знаменатель отвечает за нормировку — сумма всех вероятностей должна быть равна единице.

При выполнении дальнейших преобразований будем считать, что энергия n-ого возбужденного уровня определяется следующим соотношением:

$$E_n = n\hbar\omega,$$

то есть не учитывать величину $\hbar\omega/2$.

Так можно поступить, поскольку энергия $\hbar\omega/2$ соответствует нулевой температуре. Выражение (14.8) в этом случае примет следующий вид:

$$\langle E\rangle_{осц} = \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} n\hbar\omega \, \mathrm{e}^{-\frac{n\hbar\omega}{kT}}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{n\hbar\omega}{kT}}}. \tag{14.9}$$

Введем следующее обозначение:

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{n\hbar\omega}{kT}} . \tag{14.10}$$

В этом случае производная

$$\frac{\partial z}{\partial \frac{1}{kT}}$$

в точности равна числителю (14.9), взятому с обратным знаком:

$$\frac{\partial z}{\partial \frac{1}{kT}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-n\hbar\omega)\, \mathrm{e}^{-\frac{n\hbar\omega}{kT}} = -\sum_{n=0}^{\infty} n\hbar\omega \, \mathrm{e}^{-\frac{n\hbar\omega}{kT}} .$$

Следовательно, выражение (14.9) примет следующий вид:

$$\langle E\rangle_{осц} = \frac{-\frac{\partial z}{\partial\frac{1}{kT}}}{z}. \tag{14.11}$$

Величина z, задаваемая выражением (14.10), представляет собой сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Напомним, что сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии определяется следующим образом:

$$S = \frac{b_1}{1-q}.$$

В нашем случае

$$b_1 = 1, \qquad q = \mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}$$

и, следовательно

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{n\hbar\omega}{kT}} = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}}.$$

Числитель в выражении (14.11) в этом случае также легко вычислить:

$$\frac{\partial z}{\partial\frac{1}{kT}} = \frac{-1}{\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}\right)^2}\left((-1)\cdot(-\hbar\omega)\,\mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}\right) = -\frac{\hbar\omega\,\mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}}{\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}\right)^2}.$$

Таким образом, средняя энергия осциллятора с частотой ω окажется равной:

$$\langle E\rangle_{осц} = \frac{\hbar\omega\,\mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}}{\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}\right)^2}\cdot\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}\right) = \frac{\hbar\omega\,\mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}}{1-\mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}}.$$

Умножая числитель и знаменатель этого выражения на

$$\mathrm{e}^{\frac{\hbar\omega}{kT}},$$

получим окончательное выражение для энергии осциллятора:

$$\langle E\rangle_{осц} = \frac{\hbar\omega}{\mathrm{e}^{\frac{\hbar\omega}{kT}}-1} = \hbar\omega\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{\hbar\omega}{kT}}-1}.$$

В этом выражении первый сомножитель $\hbar\omega$ — квант осциллятора, то есть энергия фотона с частотой ω. Второй сомножитель представляет собой число фотонов с частотой ω.

Величина

$$\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{\hbar\omega}{kT}}-1}$$

носит название «Планковский множитель».

Энергия излучения в интервале $d\omega$ определяется как произведение средней энергии осциллятора и плотности состояний (числа осцилляторов в единице объема):

$$d\mathcal{E}_\omega = \langle E\rangle\cdot g(\omega)\,d\omega = \hbar\omega\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{\hbar\omega}{kT}}-1}\cdot\frac{\omega^2}{\pi^2c^3}V\,d\omega.$$

Плотность энергии $\rho(\omega)$ (средняя энергия равновесного излучения в единице объема) имеет следующий вид:

$$\rho_\omega = \frac{1}{V}\frac{d\mathcal{E}_\omega}{d\omega} = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}\frac{\hbar\omega}{\mathrm{e}^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}. \tag{14.12}$$

Введем безразмерный параметр

$$\xi = \frac{\hbar\omega}{kT}.$$

В этом случае

$$\frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} = \frac{\hbar^3\omega^3}{\hbar^2\pi^2 c^3} = \frac{(\xi kT)^3}{\pi^2\hbar^2 c^3}.$$

Формула Планка (выражение (14.12)) в этом случае примет следующий вид:

$$\rho_\omega = \frac{k^3T^3}{\hbar^2\pi^2c^3}\frac{\xi^3}{\mathrm{e}^\xi - 1}. \tag{14.13}$$

Зависимость $\rho_\omega(\omega)$ представлена на рисунке 14.5.

Обозначим с помощью $\omega_{\max}$ частоту, которая соответствует максимуму в спектре $\rho_\omega(\omega)$. Найдем значение этого максимума из условия равенства нулю производной $\rho_\omega(\xi)$ по ξ:

$$\frac{d\rho}{d\xi} = 0.$$

Дифференцируя формулу (14.13) по ξ, получим:

$$\frac{d\rho}{d\xi} = \frac{k^3T^3}{\hbar^2\pi^2c^3}\cdot\frac{3\xi^2(\mathrm{e}^\xi - 1) - \xi^3 e^\xi}{(\mathrm{e}^\xi - 1)^2}.$$

Приравнивая числитель этого выражения к нулю, получим:

$$3\xi^2(\mathrm{e}^\xi - 1) - \xi^3 e^\xi = \xi^2(3e^\xi - 3 - \xi\,\mathrm{e}^\xi) = 0 \quad\Rightarrow\quad 3(\mathrm{e}^\xi - 1) = \xi\,\mathrm{e}^\xi\,.$$

Полученное трансцендентное уравнение решается только численно. Численное решение показывает, что

$$\xi = 2,82.$$

Полученная закономерность носит название **закон смещения Вина**:

$$\omega_{\max} \simeq 2{,}8\frac{kT}{\hbar} \propto T.$$

При температурах T_1 и $T_2 > T_1$ отношение координат максимумов плотностей вероятности равно отношению температур (см. рис. 14.6):

$$\frac{\omega_{\max}^{(1)}}{\omega_{\max}^{(2)}} = \frac{T_1}{T_2}.$$

С экспериментальной точки зрения это очевидно: при нагревании предмета в пламени горелки излучение смещается в сторону малых длин волн λ (то есть высоких частот).

Стоит заметить, что в экспериментах всегда измеряется длина волны, а не частота. Формула Планка (14.13) для длин волн имеет следующий вид:

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \rho_\lambda = 16\pi^2 \frac{\hbar c}{\mathrm{e}^{\frac{2\pi\hbar c}{\lambda kT}} - 1} \cdot \frac{d\lambda}{\lambda^5}. \tag{14.14}$$

Это означает, что зависимость от λ имеет немного другой вид, чем от частоты. При проведении экспериментов всегда стоит пользоваться формулой (14.14), описывающей зависимость плотности равновесного излучения черного тела от длины волны.

Максимум по частоте $\omega_{\max}$ и длине волны $\lambda_{\max}$ будут различаться:

$$\lambda_{\max} \neq \frac{2\pi c}{\omega_{\max}}.$$

Длина волны, соответствующая максимальному излучению, для распределения по частоте оказывается равной:

$$\lambda_{\max}^{(\omega)} = \frac{0{,}52}{T}[\textit{см}]. \tag{14.15}$$

Например, при длине волны

$$\lambda = 5000\text{Å} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ см}$$

температура окажется равной:

$$T^{(\omega)} = \frac{0{,}52}{\lambda} \simeq \frac{0{,}5}{5 \cdot 10^{-5}} = 10^4 \text{ К}.$$

Таким образом, при температуре 10000 К максимум излучения по частоте ω достигается при длине волны

$$\lambda = 5 \cdot 10^{-5} \text{ см}.$$

При измерениях по длине волны окажется, что максимальная длина волны определяется следующим образом:

$$\lambda_{\max}^{(\lambda)} = \frac{0{,}29}{T},$$

то есть почти вдвое меньше, чем (14.15).

Температура в этом случае окажется также почти вдвое меньше:

$$T^(\lambda) = \frac{0{,}29}{\lambda} \simeq 5 \cdot 10^3 \text{ К}.$$

Отличие максимумов связано с тем, что измерения проводятся в других переменных.

Рассмотрим асимптотику функции плотности равновесного излучения при высоких и низких температурах. В **квантовом случае**

$$\hbar\omega \gg kT,$$

где $\hbar\omega$ — квант энергии.

В этом случае

$$\rho_\omega \propto \mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}.$$

Таким образом, при больших ω зависимость $\rho(\omega)$ пропорциональна затухающей к нулю экспоненте (см. рис. 14.7).

Следовательно, в силу дискретности $\hbar\omega$ на больших частотах черное тело не излучает, поскольку ему оно не обладает достаточной энергией для возбуждения первого энергетического уровня $\hbar\omega$.

В **классическом случае**, наоборот,

$$\hbar\omega \ll kT,$$

то есть частоты малы.

В этом случае при очень больших длинах волн экспоненту можно разложить в ряд:

$$\mathrm{e}^{\frac{\hbar\omega}{kT}} \approx 1 + \frac{\hbar\omega}{kT}.$$

Плотность состояний ρ_ω в этом случае примет следующий вид:

$$\rho_\omega \sim \frac{\hbar\omega^3}{\frac{\hbar\omega}{kT}\pi^2 c^3} = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \cdot kT. \tag{14.16}$$

Формула (14.16) носит название **формула Рэлея – Джинса**. Таким образом, при малых ω зависимость квадратичная (см. рис. 14.7), а отношение плотности состояний при разных температурах линейно зависит от температуры (см. рис. **??**):

$$\frac{\rho_1}{T_1} = \frac{\rho_2}{T_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{T_1}{T_2}. \tag{14.17}$$

Таким образом, график **??** (и, соответственно 14.6), очевидно, построен неверно. Сделано это было умышленно.

Согласно формуле (14.17), излучение при температуре T_2 должно быть больше, чем при температуре T_1 (принимая во внимание, что T_2 считается больше, чем T_1).

Пересечение кривых $\rho_\omega^{(T_1)}$ и $\rho_\omega^{(T_2)}$ на рисунке **??** соответствует случаю, когда излучение одинаково при различных температурах, что невозможно.

На самом деле, кривые на рисунке **??** не должны пересекаться. На самом деле, вид кривых при температурах

$$T_1, \qquad T_2 = 2T_1$$

представлен на рисунке **??**.

Формула Рэлея – Джинса в классическом случае не ограничивает рост функции ρ_ω при больших частотах ω (при малых длинах волн).

Таким образом, в классическом случае плотность излучения увеличивается до бесконечности по мере роста частоты излучения. Это явления получило название «**ультрафиолетовая катастрофа**», и разрешить ее не удавалось до Макса Планка.

Решить этот парадокс можно перейдя к квантовому рассмотрению на больших частотах: энергия первого возбужденного состояния осциллятора равна $\hbar\omega$.

Если

$$kT \ll \hbar\omega,$$

то вероятность того, что произойдет возбуждение первого уровня энергии осциллятора очень мала и пропорциональна

$$\mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}.$$

Покажем, как в классическом случае получить закон излучения черного тела (не пользуясь квантовым рассмотрением). Считалось, что

$$\rho(\omega) = \frac{\textit{средняя энергия}}{\textit{осциллятора}} \times \frac{\textit{число осцилляторов}}{\textit{в единице объема}} = kT \times \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3},$$

то есть в точность формула Рэлея – Джинса (14.16).

При проверке закона теплового излучения, полученного Максом Планком, наблюдалось потрясающее совпадение теории и эксперимента. Таким образом, объяснить спектр излучения черного тела можно только с помощью гипотезы квантов.

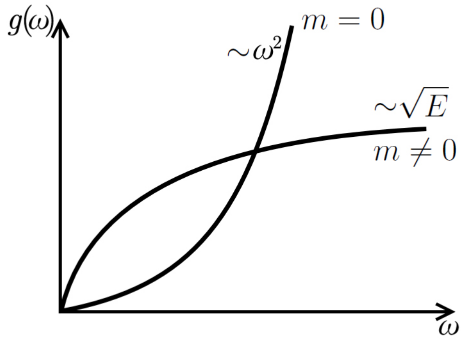

Рис. 14.2

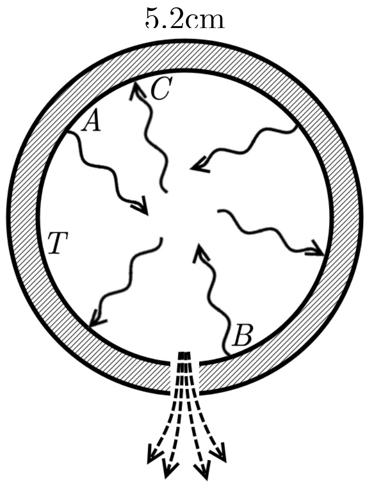

Рис. 14.3

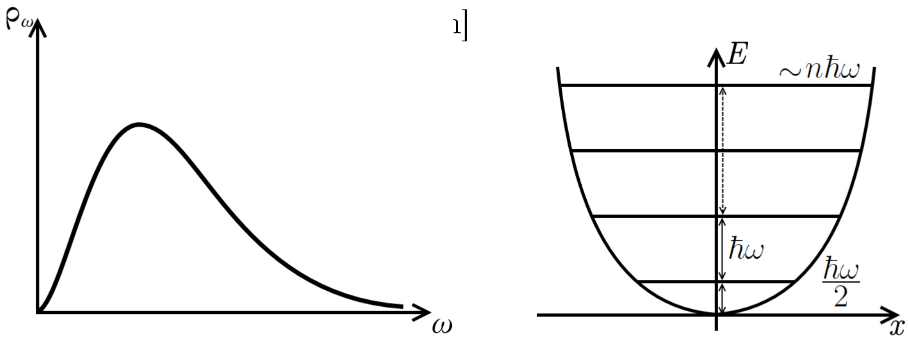

Рис. 14.4

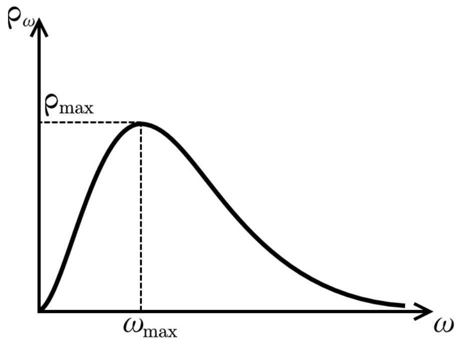

Рис. 14.5

[h]6.2cm

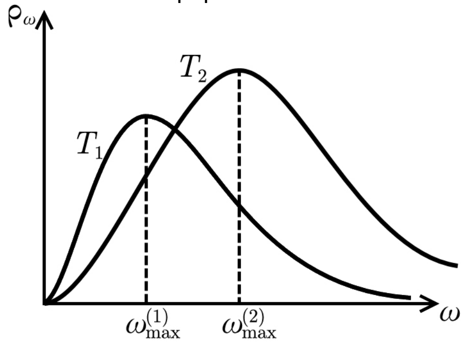

Рис. 14.6

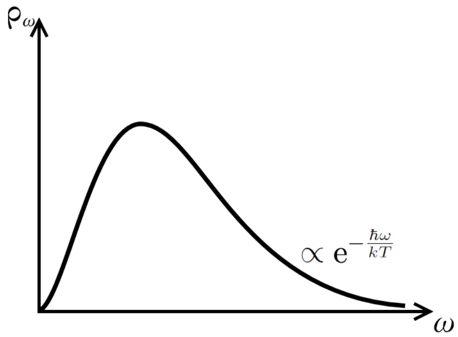

Рис. 14.7

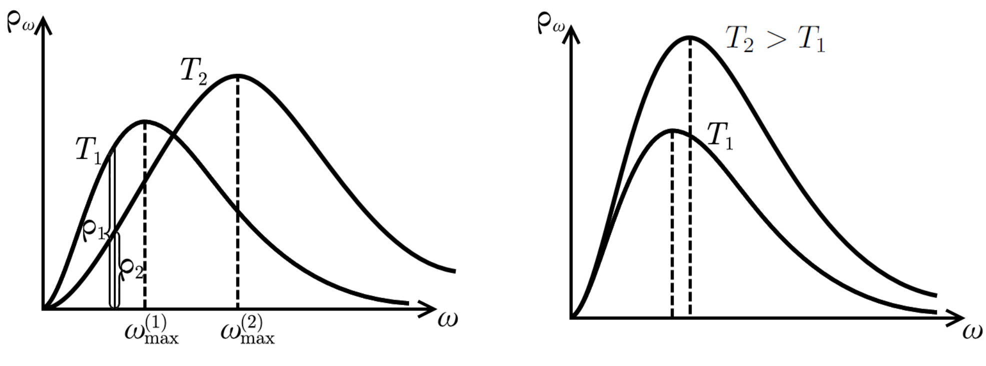

Рис. 14.8