ЛЕКЦИЯ 2

Уравнение состояния. Первое начало термодинамики

2.1. Внутренняя энергия

Внутренняя энергия $U(T, V)$ — кинетическая энергия молекул и энергия взаимодействия (которой в идеальном газе нет).

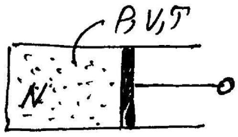


Рис. 2.1.

При повышении температуры молекулы меняются: теряются электроны, растет количество молей газа. Следовательно, внутреннюю энергию определяем как термодинамический потенциал:

$$U = \frac{3}{2}\nu RT + U_0 \text{ — одноатомный газ; для удобства } U_0 \approx 0.$$

Внутренняя энергия идеального газа зависит только от температуры:

$$U = \frac{i}{2}\nu RT, \quad \text{где } i \text{ — число степеней свободы}$$

$$i = \begin{cases} 3 \text{ — одноатомный газ,} \\ 5 \text{ — двухатомный,} \\ 6 \text{ — многоатомный.} \end{cases}$$

Закон Джоуля для идеального газа:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{T=\text{const}} = 0.$$

Изменяем состояние идеального газа двумя способами:
1. работа $\delta A = P\,dV$ (только для системы 2.1);
2. теплообмен.

$$\Rightarrow \quad dU = -\delta A + \delta Q, \quad \delta Q = dU + P\,dV \text{ — для бесконечно малых количеств.}$$

$$\boxed{Q = \Delta U + A}$$

2.2. Теплоемкость

Определение **теплоемкости**:

$$C_x = \left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_x,$$

где x — некий параметр, который остается постоянным во время этого процесса ($x = V, T, P, V^2, \ldots$).
C_V — теплоемкость при постоянном объеме:

$$C_v = \left(\frac{dU + PdV}{dT}\right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V.$$

C_p — теплоемкость при постоянном давлении:

$$\delta Q_P = dU(T,V) + P\,dV_P = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT_P + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV_P + P\,dV_P =$$

$$= C_V dT_P + \left(P + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T\right) dV_P,$$

$$\Rightarrow \quad C_P = \frac{\delta Q_P}{dT_P} = C_V + \left(P + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T\right)\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P,$$

Что приводит нас к **соотношению Майера:**

$$C_P - C_V = \left[P + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T\right]\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P,$$

Для идеального газа $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0$, поэтому

$$PV = RT, \quad V = \frac{R}{P}T, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \frac{R}{P},$$

$$\Rightarrow \quad C_P - C_V = P\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = R, \qquad \Rightarrow \quad \boxed{C_P - C_V = R}$$

2.3. Энтальпия

Еще один термодинамический потенциал — **энтальпия** I (теплосодержание):

$$\boxed{I \equiv H = U + PV}$$

$$C_p = \left(\frac{\delta Q}{\partial T}\right)_P = \left(\frac{dU + PdV + VdP}{dT}\right)_P = \left(\frac{dU + d(PV)}{dT}\right)_P = \left(\frac{\partial(U + PV)}{\partial T}\right)_P = \left(\frac{\partial I}{\partial T}\right)_P.$$

Здесь добавили в числителе $VdP = 0$.

Пример 2.1. Рассмотрим температурную зависимость C_V для водорода H_2.

$$C_V(T) = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \frac{i}{2}R.$$

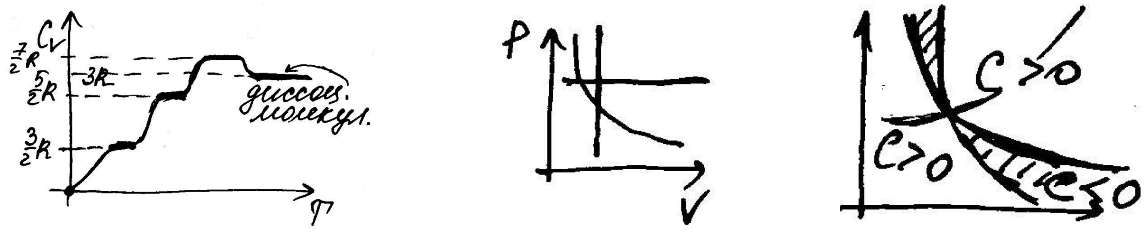
2.4. Политропические процессы

Политропический процесс — это процесс, протекающий при постоянной теплоемкости: $C = \text{const}$.

$$PV^n = \text{const}, \qquad \text{где } n = \frac{C - C_P}{C - C_V}.$$

Изохора, изобара, изотерма — политропические процессы. К этим процессам также относится адиабата Пуассона:

$$C = 0, \quad PV^\gamma = \text{const}, \quad \gamma = \frac{C_P}{C_V}.$$



а) б) в)

Рис. 2.2.

2.5. Скорость звука в газовой среде

Из механики: $v_{\text{ЗВ}} = \sqrt{E/\rho}$

$$P = -E\varepsilon = -E\frac{\Delta l}{l} = -E\frac{\Delta V}{V},$$

где E — модуль Юнга, ε — относительное удлинение.

Рассмотрим трубу, в которой газ содержится под давлением (только в этом случае звук может распространяться по этой среде).

$$\Delta P_x = \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_x \cdot \Delta V_x = \left[-\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_x V\right] \cdot \left(\frac{-\Delta V_x}{V}\right)$$

Здесь мы умножили и разделили на $-V$.

$$M = V\rho, \qquad \frac{dV}{V} + \frac{d\rho}{\rho} = 0, \quad \text{(масса под поршнем не меняется)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dV}{V} = -\frac{d\rho}{\rho}$$

$$\Rightarrow \quad E = -V\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_x = \rho\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_x \text{ — \textbf{модуль Юнга}}.$$

$$v_{\text{ЗВ}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_x}$$

— общее соотношение, справедливое для любого изотропного вещества. x — адиабатический процесс. Теплообмен не успевает происходить при распространении звука.

$$PV^\gamma = \text{const} \quad \Rightarrow \quad P = \rho^\gamma \cdot \text{const}, \quad \frac{\partial P}{\partial \rho} = \gamma \cdot \rho^{\gamma-1}\text{const} = \gamma\frac{P}{\rho}.$$

$$\boxed{v_{\text{зв}} = \sqrt{\gamma\frac{P}{\rho}} = \sqrt{\gamma\frac{RT}{\mu}}}$$

Для идеального газа $P\mu = \rho RT$, где μ — молярная масса газа.

$\lambda = v_{\text{ЗВ}}/\nu$ — длина звуковой волны (определяется длиной связок для человека).

Частота звукового тона $\nu \sim 10$кГц$=10^4$Гц.

$$\lambda_{\text{ЗВ}} \sim \frac{3,4 \cdot 10^4\,\text{см/с}}{10^4\,\text{Гц}} = 3,4\,\text{см}, \qquad T = 10^{-4}c$$

За время T теплота не успевает выйти за пределы $\lambda^3 \sim 30\text{см}^3$, поэтому этот процесс можно считать адиабатическим.

2.6. Истечение газов через отверстие (сопло)

Газ вырывается в виде сплошной струи.

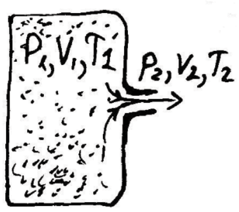


Рис. 2.3.

$$\varepsilon + \frac{P}{\rho} = \text{const} \text{ — **уравнение Бернулли**}$$

$m = 1$кг (все относим к ед. массы), где $\varepsilon = v^2/2 + 1 \cdot gh + U_{\text{уд}}$, ($1 \cdot gh$ не меняется, а $U_{\text{уд}}$ надо учитывать, так как процесс не изотермический).

$$\frac{P}{\rho} = P \cdot V_{\text{уд}},$$

где $V_{\text{уд}}$ — объем единицы массы.

$$U_{\text{уд}} + PV_{\text{уд}} = i \text{ — удельная энтальпия истекающего газа.}$$

$$\boxed{i + \frac{v^2}{2} = \text{const}}$$

$$i_1 + \frac{v_1^2}{2} = i_2 + \frac{v_2^2}{2} \qquad v_2 = \sqrt{2(i_1 - i_2)}, \qquad v_1^2/2 \approx 0 \tag{2.1}$$

$$C_P = \left(\frac{\partial I}{\partial T}\right)_P, \quad C_P^{\text{уд}} = \left(\frac{\partial i}{\partial T}\right)_P$$

Газ идеальный, поэтому $i = i(T)$:

$$i = \frac{1}{\mu} C_P \cdot T, \text{где } C_p \text{ — молярная теплоемкость.}$$

Подставляем в (2.1):

$$v_2 = v = \sqrt{\frac{2}{\mu} C_p (T_1 - T_2)}.$$

Если газ истекает в вакуум:

$$v = \sqrt{\frac{2}{\mu} C_p T_1}$$

$$C_P = C_V + R = \frac{C_V}{C_P} \cdot C_P + R = R + \frac{C_P}{\gamma} \quad \Rightarrow \quad C_P = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}.$$

$$v = \sqrt{\frac{2}{\mu} C_p T_1} = \sqrt{\frac{2}{\mu} \cdot \frac{\gamma R T}{\gamma - 1}} = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}} \cdot v_{\text{зв}} > v_{\text{зв}}$$

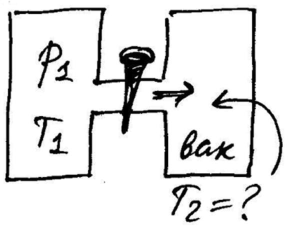


Рис. 2.4.

Пример 2.2. Рассмотрим внутреннюю энергию истекающего газа в расчете на один моль:

$$\varepsilon = \frac{\mu v^2}{2} = C_P \cdot T_1 = C_V \cdot T_2 \quad \Rightarrow \quad T_2 = \frac{C_P}{C_V} T_1 = \gamma T_1 > T_1$$

Из выкладок следует, что температура увеличится. Если газ неидеальный, то температура упадет.

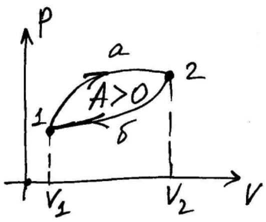


Рис. 2.5.

2.7. Циклы

Цикл — это процесс, в котором начальные и конечные параметры, определяющие состояние рабочего тела, совпадают. Контур, по которому ведется интегрирование, обходится по часовой стрелке.

$$\oint\limits_{1a2б1} dU = 0, \qquad \oint \delta Q - \oint \delta A = 0, \qquad \oint \delta Q = \oint \delta A$$

Если $A > 0$, то устройство, для цикла работы которого справедливо данное неравенство, называется тепловой машиной.

Если процесс запустить против часовой стрелки, то будет справедливо обратное ($A < 0$), и это будет пустая трата усилий: энергия уйдет в тепло.