ЛЕКЦИЯ 12

Явления переноса. Теплопроводность

12.1. Одномерная теплопроводность

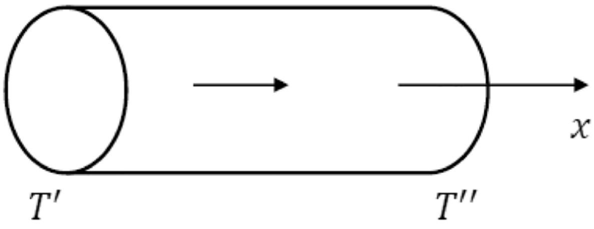

Рис. 12.1.

j (или q) $\left[\frac{\text{эрг}}{\text{см}^2\cdot\text{с}}\right]$ — плотность потока тепловой энергии, бегущей слева направо, цель которого — выравнять температуры.

$$j = -æ\frac{\partial T}{\partial x} \quad æ\left[\frac{\text{эрг}}{\text{с}\cdot\text{см}\cdot\text{К}}\right]\left(\left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}\right]\right)$$

— коэффициент теплопроводности.

$$æ = \frac{1}{3}\lambda\,\rho\,\bar{v}\,C_V^{\text{уд}}, \quad \lambda\,\rho = \text{const}, \quad a = \frac{æ}{C_V}.$$

$æ \sim \sqrt{T}$ (если масса и все остальное не меняется).
$æ \sim \frac{1}{\sqrt{m}}$ (если не меняется температура).

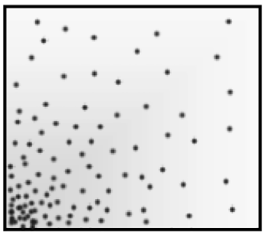

Рис. 12.2.

Если есть комната без конвенции, то можно ввести понятие **времени выравнивания** — это время, за которое появившийся в уголке второй газ распределится по комнате, неравновесность исчезнет.
$L \sim \sqrt{D\,t}$, $\quad L \sim \sqrt{a\,t}$ (для выравнивания температур).

$$a = \frac{æ}{C_V^{\text{об}}} = \frac{æ}{\rho\,C_V^{\text{уд}}} = D.$$

12.2. Нестационарная теплопроводность

$$[j(x) - j(x+dx)]\,dt\cdot S\frac{dx}{dx} = -\frac{\partial j}{\partial x}dx\cdot Sdt,$$

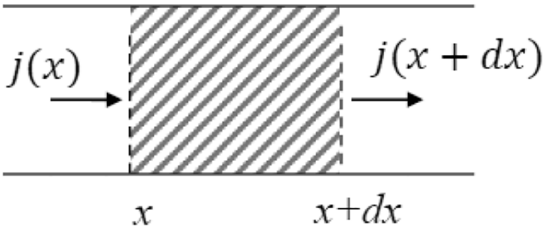

Рис. 12.3.

где S — сечение трубы. Это же тепло равно

$$dM\, C_V^{\text{уд}}\, dT = \rho\, S\, dx\, C_V^{\text{уд}}\, dT.$$

Следовательно, возникает дифференциальное уравнение — **уравнение теплопроводности:**

$$\rho\, C_V^{\text{уд}} \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(-æ\frac{\partial T}{\partial x}\right).$$

(здесь мы использовали **формулу Фурье**).

$$\Rightarrow \quad \boxed{\rho\, C_V^{\text{уд}}} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(æ\frac{\partial T}{\partial x}\right).$$

В стационарном случае: $\frac{\partial}{\partial x}\left(æ\frac{\partial T}{\partial x}\right) = 0$.
Рассматривают случаи:

1. сферическая симметрия:

$$\rho\, C_V^{\text{уд}} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left[æ\, r^2 \frac{\partial T}{\partial r}\right] \ (+q)\ ;$$

2. цилиндрическая симметрия:

$$\rho\, C_V^{\text{уд}} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left[æ\, r \frac{\partial T}{\partial r}\right] \ (+q)\,,$$

$(+q)$ — может быть еще помещен источник энергии.

В стационарном случае:

1. сферическая симметрия: $\frac{\partial}{\partial r}\left[æ\, r^2 \frac{\partial T}{\partial r}\right] = 0\,;$
2. цилиндрическая симметрия: $\frac{\partial}{\partial r}\left[æ\, r \frac{\partial T}{\partial r}\right]$.

12.3. Вязкость

В механике: $F = \eta S \frac{v}{h}$, h — толщина слоя, η — коэффициент вязкости (динамический).

Средняя компонента импульса, переносимого за 1 сек. через 1 см^2 плоскости z снизу вверх равна:

$$\frac{1}{6} n\, \bar{v}\, m\, u_x(z - \lambda),$$

сверху вниз:

$$\frac{1}{6} n\, \bar{v}\, m\, u_x(z + \lambda).$$

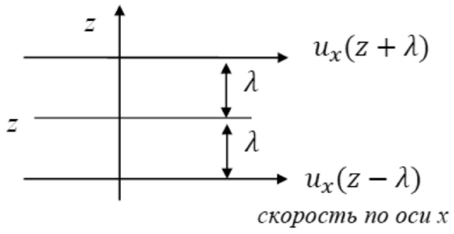

Рис. 12.4.

$$P_{zx} = \frac{1}{6}n\bar{v}\left\{m\,u_x(z-\lambda) - m\,u_x(z+\lambda)\right\}\cdot\frac{2\lambda}{2\lambda} = \frac{1}{6}n\bar{v}m\left(-\frac{\partial u_x}{\partial z}\right)2\lambda = -\eta\frac{\partial u_x}{\partial z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\eta = \frac{1}{3}\lambda\,\rho\,\bar{v}}.$$

Оценка: для воздуха $m\,(\text{молек}) = \frac{29}{6\cdot 10^{23}} = 4,7\cdot 10^{-23}\,\text{г}$,

$$m\bar{v} = \sqrt{3mKT} = 2.4\cdot 10^{-18}\,\frac{\text{г}\cdot\text{см}}{\text{с}},$$

$$d \simeq 3\cdot 10^{-8}\,\text{см}, \quad \sigma = \pi d^2 = 2,7\cdot 10^{-15}\,\text{см}^2$$

$$\Rightarrow \quad \eta = \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{2}\,n\sigma}mn\bar{v} \approx 5\cdot 10^{-4}\,\frac{\text{г}}{\text{см}\cdot\text{с}} \text{ — оценка.}$$

Табличное значение: $\eta = 1,78\cdot 10^{-4}\,\frac{\text{г}}{\text{см}\cdot\text{с}}$.

$$\eta \sim \sqrt{T} \qquad (\text{На самом деле из реальных опытов}\,\eta \sim T^{0,7}.)$$

В жидкости вязкость с ростом температуры падает, а вязкость газа растет.

12.4. Явление переноса в разреженных газах

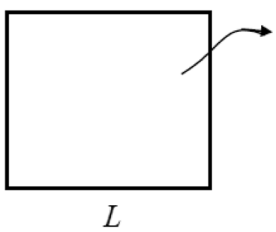

Рис. 12.5.

Если из сосуда откачали воздух и при откачке длина свободного пробега становится все больше и больше $\sim$ порядка размеров сосуда: $\lambda \sim L$ — средний вакуум.
$\lambda \lesssim L$ — низкий вакуум;
$\lambda > L$ — глубокий вакуум. Что считать равновесием в этих условиях?
Здесь условие равновесия — равенство потоков из A в B и из B в A.

$$\text{Поток} \qquad \Phi = \frac{n\,\bar{v}}{4}\cdot S = \frac{n\,S}{4}\sqrt{\frac{8KT}{\pi m}} = \frac{PS}{\sqrt{2\pi mKT}} \sim \frac{PS}{\sqrt{T}}.$$

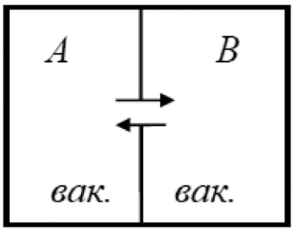

Рис. 12.6.

Если $\lambda \gg \sqrt{S}$ — **молекулярная эффузия** (S — размер отверстия)

$$\frac{P_A}{\sqrt{T_A}} = \frac{P_B}{\sqrt{T_B}} \text{ — условие равновесия.}$$

В условиях вакуума поток идет от холодного к горячему при $P_A = P_B$ (нарушение равенства потоков).

Формула Пуазейля для течения газа: массовый поток для жидкости:

$$Q = \rho \frac{P_1 - P_2}{8\eta l} \pi r^4,$$

$$\text{для газа}: \ \rho = \frac{P_1 + P_2}{2RT} \mu.$$

Отсюда:

$$Q = \frac{P_1^2 - P_2^2}{16\eta l RT} \mu \pi R^4$$

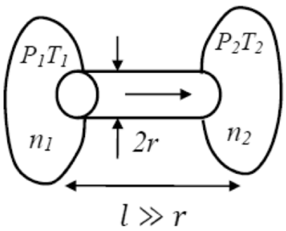

Рис. 12.7.

Формула Кнудсена для потока газов в условиях молекулярной эффузии:

$$\Phi = -D \frac{\partial n}{\partial x} S \left[\frac{\text{шт}}{\text{с}}\right],$$

$$D = \frac{1}{3} \lambda \bar{v}, \qquad \frac{dn}{dx} \approx \frac{n_2 - n_1}{l},$$

$$\Phi = \frac{1}{3} \lambda \bar{v} \cdot \frac{n_2 - n_1}{l} \cdot S, \qquad S = \pi r^2, \ \lambda = 2R$$

$$\Rightarrow \ \boxed{\Phi = \frac{2}{3} \bar{v} \frac{n_2 - n_1}{l} \pi r^3} \text{ — \textbf{формула Кнудсена}.}$$

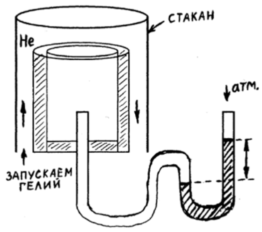

Рис. 12.8.

12.5. Изотермическая эффузия

Возьмем пористый стакан: $T = \mathrm{const}$.

Поток через стенки:

$$\Phi = \frac{n\bar{v}}{4}S = \frac{PS}{\sqrt{2\pi mKT}} \sim \frac{P}{\sqrt{m}}.$$

Запускаем под обычный стакан He и вытесняем из него воздух. Поскольку поток сквозь поры обратно пропорционален $\sqrt{m}$, то He начнет быстрее просачиваться в малый объем, и во внутреннем стакане давление будет больше. Возникнет разность давлений и разность, следовательно, разность уровней в трубке.

$$\Phi_1 = \frac{A}{\sqrt{m_1}} \text{ — слева,} \quad \Phi_2 = \frac{A}{\sqrt{m_2}} \text{ — справа,}$$

$$\Phi_1\sqrt{m_1} = \Phi_2\sqrt{m_2}.$$