ЛЕКЦИЯ 2

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА. РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ЭФФЕКТЫ. ИНТЕРВАЛ. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ СТО

В предыдущей лекции мы установили формулы преобразования координат от одной системы к другой, движущейся со скоростью v.

$$x = \frac{x' + v\,t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \tag{2.1}$$

а также формулы обратного преобразования:

$$x' = \frac{x - v\,t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z. \tag{2.2}$$

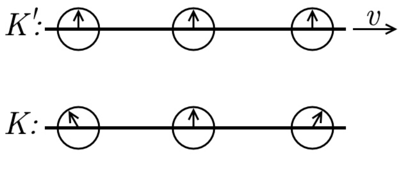

Рис. 2.1

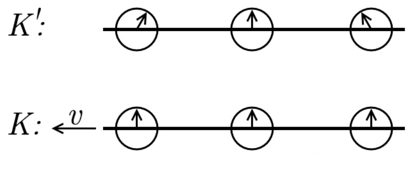

Рис. 2.2

В дальнейшем часто будем пользоваться системой, где $c = 1$. Будем также пользоваться рис.**??** из прошлой лекции. Согласно преобразованиям Лоренца для времени, если часы синхронизированы в системе K', движущейся со скоростью v, то часы в системе K не будут синхронизированы (см. рис. 2.2). И наоборот, если часы синхронизированы в движущейся влево системе K, то часы в K' синхронизированы не будут (см. рис. 2.2)

Перейдем к рассмотрению некоторых эффектов специальной теории относительности.

1. Релятивистское увеличение времени

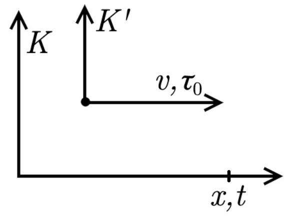

Рис. 2.3

Пусть из ускорителя выпущен пучок частиц, и из мишени вылетела частица, обладающая скоростью v и временем жизни τ_0 (см. рис. 2.3). С этой частицей свяжем начало движущейся системы координат K', а наблюдать будем из неподвижной системы K. Пусть эта частица, пролетев некоторое расстояние x за время t в системе K, распалась. Найдем связь времени t с временем жизни τ_0.

Положим $x' = 0$. Тогда из преобразований Лоренца (2.1) получим:

$$t = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Определение 1: *Время, которое показывают часы, движущиеся вместе с объектом, называется* ***собственным временем****.* ♣

Определение 2: *Время, которое показывают часы в системе координат, в которой мы наблюдаем за объектом, называется* ***лабораторным временем****.* ♣

Видно, что лабораторное время t оказалось больше собственного. Из преобразований Лоренца (2.1) для координаты x получим:

$$x = \frac{v\,\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = v\,t. \tag{2.3}$$

Как понять этот эффект? Нельзя сказать, что движущиеся часы шли медленнее. Ведь для каждой из систем координат в качестве единицы измерения можно выбрать одно и то же физическое явление, например, частоту спектральной линии какого-либо атома. Итак, часы и в K', и в K идут в одном и том же темпе.

Дело в том, что с точки зрения наблюдателя в K', часы в системе K заранее были поставлены на большее (см. рис. 2.1) время. А с точки зрения наблюдателя в K, часы

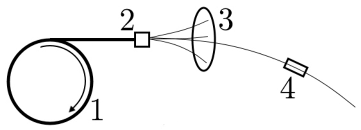

Рис. 2.4

в системе K' были поставлены на меньшее (см. рис. 2.2) время. Поэтому и получилась разница.

Этот эффект имеет очень большое значение в экспериментальной физике высоких энергий.

Пример 1 Существует частица, называемая сигма-минус гиперон Σ^-, ее время жизни $\tau_o \sim 10^{-10}$ сек. Чтобы ее обнаружить, можно вывести из ускорителя (1) пучок частиц, бросить его на мишень (2), затем поставить магнит (3), чтобы выделить частицы с отрицательным знаком (см. рис. 2.4).

Без релятивистского увеличения времени, при движении со скоростью v близкой к c, расстояние $c\,\tau_0$ было бы очень маленьким, порядка 3 см. В случае гиперонного пучка, энергия Σ^- составляет порядка 600 ГэВ и гамма-фактор

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \simeq 500.$$

В этом случае, длина пробега частицы $l \simeq 15$ м. На расстоянии 15 метров можно было бы поставить черенковские счетчики (4), определяющие скорость частиц, выделить из потока частиц нужную и с ней проводить эксперимент.

Вообще говоря, распад происходит по экспоненциальному закону:

$$N = N_0\, e^{-\frac{t'}{\tau_0}} = N_0\, e^{-\frac{x'}{x_0}}, \quad x_0 = \frac{v\,\tau_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Поэтому, поскольку частиц летит довольного много, то счетчики можно ставить и на расстоянии 30 или 45 метров, где число частиц уменьшится соответственно в e^2 и e^3 раз. $*$

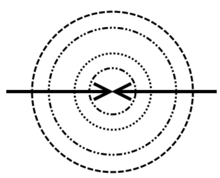

Рис. 2.5

Учет этого эффекта, например, позволяет определить характеристики распада частицы.

Пример 2 Эффект, описанный в этом примере, широко используется на ускорителях, коллайдерах. Как известно, частица Хиггса характеризуется различными распадами, например, на b и $\bar{b}$ кварки:

$$H \to b + \bar{b},$$

время жизни которых составляет около $\tau \sim 10^{-12}$ сек. Гамма-фактор этих частиц примерно равен 50, поэтому они пролетают совсем небольшое расстояние. Для того, чтобы определить, где распадется частица, точку столкновения пучков окружают специальным вершинным детектором, состоящим из полупроводниковых полос (см. рис. 2.5). Сигналом о том, что b кварк получился, является распад на определенном расстоянии. Точность измерения такого детектора порядка 10 микрон. $*$

Рассмотрим другой важный эффект специальной теории относительности.

2. Сокращение продольного масштаба

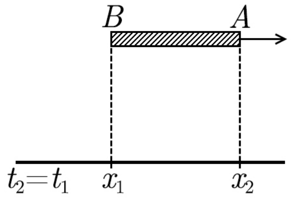

Рис. 2.6

Пусть некая линейка движется со скоростью v (см. рис. 2.6). Как измерить ее длину? Если речь идет об измерении поперечного масштаба, то, измерение длины никак не связано с временем. Если нужно измерить продольный масштаб, пользуются «мгновенной фотографией» — нужно засечь координату начала A и конца B линейки в один и тот же момент времени, $t_2 = t_1$.

Используя обратные преобразования Лоренца (2.2), получим:

$$x_1' - x_2' = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

где $l_0 = x_1' - x_2'$ — длина движущегося масштаба с собственной СК,
$l = x_1 - x_2$ — длина движущегося масштаба в лабораторной СК.

Получается, что

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

т.е. измеренная нами длина меньше, чем его длина в собственной системе координат. Чтобы объяснить этот эффект с точки зрения наблюдателя, находящегося на движущемся масштабе, измерим время на обоих концах движущегося масштаба в системе K':

$$t_2' - t_1' = -\frac{\frac{v}{c^2}(x_1 - x_2)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} < 0,$$

следовательно, $t_2' > t_1'$. Теперь понятно, почему длина в лабораторной системе координат уменьшилась: с точки зрения наблюдателя на движущемся масштабе, мы сначала засекли координату правого (с индексом 1) конца отрезка, лишь через некоторое время — левого (с индексом 2).

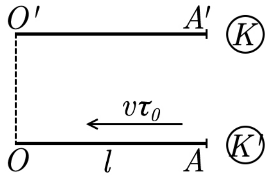

Рис. 2.7

Теперь вернемся и попробуем рассмотреть оба этих эффекта вместе. Рассмотрим снова Σ^- гиперон, который пролетел от начала некоторое расстояние (см. рис. 2.7). В соответствии с (2.3) это расстояние равно:

$$x = \frac{v\,\tau_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

С другой стороны, для наблюдателя в системе K' точка A (точка распада в системе K) двигалась влево время τ_0 со скоростью v. Получается, что для наблюдателя в K' частица распалась на расстоянии $v\,\tau_0$. Объяснить такое несоответствие можно с помощью эффекта сокращения продольного масштаба. Если наблюдатель в системе K' длину OA измеряет по своим часам, то для него $O'A'$ должно быть меньше чем OA:

$$l' = l\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = v\,\tau_0,$$

как и было найдено раньше.

Здесь есть повод задуматься еще вот о чем: наблюдатель в системе K рассуждает с точки зрения времени, а наблюдатель в K' — с точки зрения длины. Но приходят они к одному и тому же результату. По видимому, промежуток времени и промежуток расстояния как-то связаны между собой.

3. Интервал

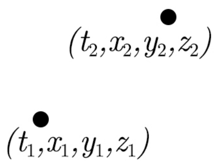

Рис. 2.8

Рассмотрим величину, называемую **интервалом**. Пусть произошли два события: (t_1, x_1, y_1, z_1) и (t_2, x_2, y_2, z_2) (см. рис. 2.8). Для простоты записи будем считать, что событие 1 произошло в начале координат, т.е. $(t_1, x_1, y_1, z_1) \to 0$. Тогда событию 2 присвоим координаты: $(t_2, x_2, y_2, z_2) \to (t, x, y, z)$.

Квадрат интервала:

$$S^2 = c^2\,t^2 - (x^2 + y^2 + z^2), \tag{2.4}$$

где $c^2\,t^2$ — квадрат расстояния, которое свет прошел бы за данное время,

$x^2 + y^2 + z^2$ — квадрат пространственного расстояния.

Если бы два события были разделены световым сигналом (или любым другим сигналом, распространяющимся с предельной скоростью), например, событие 1 — испускание света, событие 2 — попадание света в нужную точку пространства, то интервал $S = 0$.

Найдем значение квадрата интервала в системе K':

$$S^2 = c^2 \left(\frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)^2 - \left\{ \left(\frac{x' + v\, t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)^2 + y^2 + z^2 \right\} = c^2\, t'^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2).$$

Получили, что интервал в другой системе координат имеет то же самое значение. Понять это можно с помощью простой .

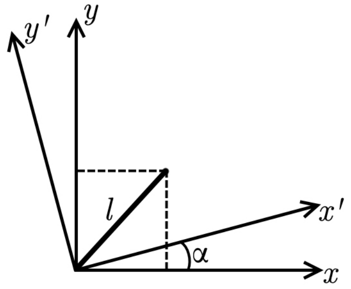

Рис. 2.9

Введем двумерную декартову систему координат (см. рис. 2.9). Выпустим из начала координат этой системы отрезок длины l

$$l^2 = x^2 + y^2.$$

Теперь повернем эту систему координат на угол α. Старые координаты через новые выражаются так:

$$\begin{cases} x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha \\ y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha. \end{cases} \tag{2.5}$$

Из этого преобразования видно, что, как и в случае с четырехмерным интервалом, $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$. То есть для отрезка длина не зависит от системы координат, а проекции зависят от системы координат.

Утверждение 1 Независимость квадрата интервала от выбора системы координат указывает на то, что пространство и время связаны в единое четырехмерное пространство, а промежутки времени промежутки и расстояния — проекции реально существующего в **четырехмерном пространстве-времени** интервала. *

В начальный период создания специальной теории относительности интервал брали с обратным знаком: вначале писали пространственные компоненты, затем временные. Иногда даже вводили четвертую координату: $x_4 = i\,c\,t$. Тогда получалось с обратным знаком евклидовое расстояние, но в четырехмерное пространстве.

В действительности нет смысла вводить мнимую координату. Надо понимать, что это пространство псевдоевклидово (не евклидово, но похоже на него). Описанное выше пространство называют **пространством Минковского**. Введение четвертой мнимой координаты также приписывают Минковскому, хотя это сделал еще Пуанкаре.

Покажем, что преобразования Лоренца — повороты в четырехмерном пространстве Минковского. Так как пространство не евклидовое, а псевдоевклидовое, то повороты будут на мнимый угол.

По аналогии с преобразованиями координат (2.5) для четырехмерного пространства можем записать:

$$\begin{cases} x = x' \cos i\,\alpha - x_4' \sin i\,\alpha \\ x_4 = x' \sin i\,\alpha + x_4' \cos i\,\alpha. \end{cases} \tag{2.6}$$

Приведем некоторые соотношения для гиперболических функций:

$$\cos i\,\alpha = \frac{e^{i(i\,\alpha)} + e^{-i(i\,\alpha)}}{2} = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2} = \operatorname{ch}\alpha,$$
$$\sin i\,\alpha = \frac{e^{i(i\,\alpha)} - e^{-i(i\,\alpha)}}{2\,i} = \frac{e^{-\alpha} - e^{\alpha}}{2\,i} = i\frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2} = i\operatorname{sh}\alpha,$$
$$\frac{1}{\operatorname{ch}^2\alpha} = 1 - \operatorname{th}^2\alpha.$$

Из последнего соотношения видно, что

$$\operatorname{ch}\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2\alpha}}, \qquad \operatorname{sh}\alpha = \frac{\operatorname{th}\alpha}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2\alpha}}.$$

Обозначим $v/c = \operatorname{th}\alpha$. Мы всегда можем ввести такое обозначение, поскольку $-1 < v/c < 1$. Величина α называется быстротой (rapidity). В последнее время она приобрела большое значение, поскольку ее можно измерить на ускорителях. Теперь для гиперболического синуса и косинуса можем записать:

$$\operatorname{ch}\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad \operatorname{sh}\alpha = \frac{v}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Дополнив эти уравнения выражением $x_4 = i\,c\,t$ и подставив все в (2.6), получим:

$$x = \frac{x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{v\,t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{x' + v\,t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$
$$t = \frac{\frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

то есть в точности преобразования Лоренца (2.1).

Благодаря существованию интервала, одинакового во всех системах координат, можем сформулировать суть специальной теории относительности.

Утверждение 2 (Суть специальной теории относительности) Пространство и время образуют вместе неразделимый четырехмерный континуум, в котором мерой расстояния между событиями является квадрат интервала. $*$

4. Три типа интервалов

Из определения интервала (2.4) очевидно следует существование трех типов интервалов:

1. $S^2 > 0$ — **времениподобные интервалы**

2. $S^2 = 0$ — **световой конус**

3. $S^2 < 0$ — **пространственноподобные интервалы**

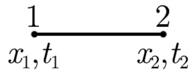

Рис. 2.10

Рассмотрим сначала случай $S^2 < 0$. Пусть два события произошли на оси X (см. рис. 2.10) и интервал между ними пространственноподобный, то есть:

$$|c\,(t_2 - t_1)| < |x_2 - x_1| \tag{2.7}$$

и $t_2 > t_1$.

Тогда мы всегда сможем выбрать систему координат, движущуюся вдоль оси X, так, чтобы в ней событие 2 произошло не позже, а раньше события 1. Воспользовавшись (2.2), получим:

$$t_2' - t_1' = \frac{(t_2 - t_1) - \dfrac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Выберем скорость так, что

$$\frac{v}{c} = \frac{(t_2 - t_1)\,c}{x_2 - x_1}, \tag{2.8}$$

и, в силу (2.7) $|v/c| < 1$. При этом $t_2' - t_1' = 0$. Если же взять $v' > v$, то $t_2' < t_1'$.

Таким образом, у событий, разделенных пространственноподобным интервалом, нет определенной последовательности времени. Это означает, что эти события не могут быть связаны причинно-следственной связью, ведь причинно-следственная связь предполагает, что причина раньше следствия. С точки зрения физики, расстояния между пространственноподобными событиями больше, чем расстояние, котороые свет проходит за $t_2 - t_1$. Следовательно, сведения о первом событии не могли успеть передаться второму.

Разделением времениподобных и пространственнопдобных событий в пространстве Минковского являются события с нулевым интервалом. Попробуем нарисовать эту поверхность. Конечно, изобразить псевдоевклидовую четырехмерную поверхность в трехмерном евклидовом пространстве не получится, но некий условный чертеж сделать можно.

Давайте на время забудем о координате Z и будем считать, что

$$S^2 = c^2\,t^2 - (x^2 + y^2).$$

В обычном евклидовом пространстве такая поверхность — конус (см. рис. 2.11). Пространственноподобные события расположены вне этого конуса, времениподобные — внутри него.

Представим, что мы захотели поменять порядок следования времени для событий, связанных времениподобным интервалом. Для этого необходимо, согласно (2.8) взять

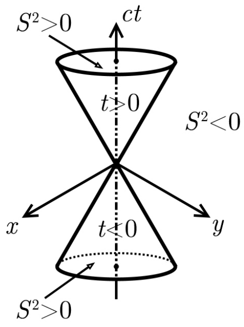

Рис. 2.11

скорость, большую скорости света, что невозможно. Следовательно, внутри конуса выше плоскости XY — **абсолютное будущее**, ниже плоскости XY — **абсолютное прошлое**. Если послать световой сигнал — он всегда будет в верхнем конусе. Из нижнего конуса все сигналы приходят в начало координат.

Рассмотрим бесконечно малое смещение

$$dS^2 = c^2\,dt^2 - (d\vec{r})^2 = c^2\,dt^2\left(1 - \frac{\frac{(d\vec{r})^2}{dt^2}}{c^2}\right) = c^2\,dt^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right).$$

Следовательно, интервал

$$dS = c\,dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Теперь представим, что мы находимся в системе координат, связанной с телом, которое смещается. Для него координата не меняется, поэтому:

$$dS = c\,d\tau \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Получили уже известную нам формулу.

Для событий, которые связаны времениподобным интервалом можно всегда найти систему координат, в которой времениподобные события происходят в одной и той же точке. Доказать это можно тем же способом, которым мы пользовались для времени с пространственноподобными событиями.

События, связанные с одним телом всегда времениподобные. В самом деле, в системе координат, связанной с этим телом, оно покоится и $dS^2 = c^2\,dt^2 > 0$.

Определение 3: Мировая линия частицы *— совокупность положений, занимаемых частицей в четырехмерном пространстве.* ♣

Пусть есть две частицы, одна и которых покоится в промежутке времени от t_0 до t, а другая за этот промежуток времени вышла из начала координат и вернулась обратно (см. рис. 2.12). Мировая линия первой частицы — отрезок на оси ct. Мировая линия второй частицы — некая кривая 2 на рисунке 2.12

Найдем собственное время второй частицы. Для того, чтобы выйти из начала координат и вернуться, нужно двигаться с некоторой скоростью $v(t)$, испытывать ускорения

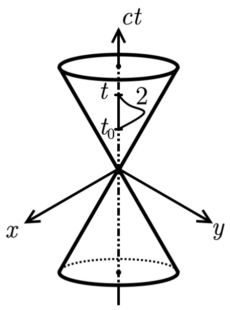

Рис. 2.12

чтобы повернуть и т.д. Собственное время:

$$d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}}.$$

Посчитаем, какое время нужно частице, чтобы вернуться в начало координат:

$$\tau = \int\limits_{t_0}^{t} \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}}\,dt.$$

Поскольку подынтегральная функция всегда меньше единицы, то

$$\tau < t - t_0.$$

Этот пример показывает условность рис. 2.11–2.12. В евклидовом пространстве расстояние для движущейся частицы было бы больше, чем для неподвижной. В нашем псевдоевклидовом пространстве все наоборот — времениподобная прямая это наибольшее расстояние, а не наименьшее.

В приведенном выше примере в системе отсчета, связанной с движущейся частицей, часы покажут меньшее время. Но природа этого явления отлична от той, что рассматривалась на рис. 2.1–2.2. Оказывается, если частица движется с ускорением, то время в такой системе течет медленнее, чем в неподвижной. Такой же эффект проявляется и для гравитационного поля. Это явление получило название **«Эффект**

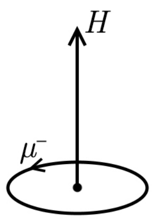

Рис. 2.13

близнецов».

Пример 3 Рассмотрим вращение нестабильной частицы мю-мезона μ в магнитном поле (см. рис. 2.13) Мю-мезон имеет массу $m \simeq 200\,m_e$ и время жизни $\tau \sim 2 \cdot 10^{-6}$ секунды.

Если эту частицу разогнать до энергии порядка 1 ТэВ, ее гамма-фактор $\gamma = 10^4$ и время жизни этой частицы сильно увеличится. Тогда, если разместить другой мю-мезон в плоскости вращения первого, тот, совершая каждый оборот вокруг вертикальной оси, встречал своего неподвижного, быстро стареющего «близнеца».

Существует реальный проект по ускорению μ^+ и μ^- частиц на теватроне и столкновению пучков этих частиц. К сожалению, этот проект очень дорогой и, к тому же, экологически опасный — проникающие частицы могут оказаться на поверхности несмотря на слой земли над ускорителем. *

В настоящее время специальная теория относительности находит применение и в военной технике: точное позиционирование ракет и противоракет требует учета эффектов специальной теории относительности.

Перейдем к изучению математического аппарата, используемого в специальной теории относительности

5. Математический аппарат СТО

В специальной теории относительности мы будем оперировать тензорами. Зачем нам нужен такой матеметический аппарат?

Любой физический закон представляет собой равенство вида $A = B$. Согласно постулатам СТО, этот закон должен выполняться также в любой другой системе координат, движущейся равномерно и прямолинейно относительно той, в которой его установили: при переходе $A \to A'$, $B \to B'$ равенство должно сохраняться.

Возьмем в пространстве два бесконечно близких события. Проекции интервала между этими событиями можем записать в виде:

$$dx^i, \quad i = 0, 1, 2, 3,$$

где $dx^0 = c\,dt, dx^1 = dx, dx^2 = dy, dx^3 = dz$.

Перейдем от СК (t, x, y, z) к системе (t', x', y', z'). Вообще говоря, в случае специальной теории относительности преобразования должны быть линейными. Но мы возьмем более общий случай. Будем считать, что

$$x^i = f^i(x'...),$$

тогда при переходе к другой системе координат, в соответствии с правилами преобразования дифференциалов, получим:

$$dx^i = \sum_k \frac{\partial f^i}{\partial x'^k}\, dx'^k.$$

Эйнштейн предложил не писать знак суммы, если суммирование ведется по верхнему и нижнему индексу (в нашем случае — по индексу k). Тогда можем записать, что

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k}\, dx'^k$$

Определение 4: Контравариантным вектором *называется совокупность четырех величин, которые при переходе к другой системе координат преобразуются как дифференциалы.*

$$A^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} A'^k.$$

Пусть есть величина ϕ. Рассмотрим преобразование градиента этой величины при переходе из одной системы координат в другую:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x'^i} = \frac{\partial \phi}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x'^i}.$$

Определение 5: Ковариантным вектором *называется совокупность четырех величин, которые при переходе к другой системе координат преобразуются как градиенты.*

$$A_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} A'_k.$$

В чем разница между контравариантными и ковариантными векторами? В евклидовом пространстве и декартовой системе координат разницы нет

$$\frac{\partial x^i}{\partial x'^k} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i},$$

однако в неевклидовом пространстве, или даже в евклидовом, но в косоугольной системе координат разница будет. Поэтому контра- и ковариантные вектора надо различать.

Запишем произведение двух контравариантных векторов

$$A^i B^k = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l} A'^l \frac{\partial x^k}{\partial x'^m} B'^m$$

и двух ковариантных векторов

$$A_i B_k = \frac{\partial x'^l}{\partial x^i} A'_l \frac{\partial x'^m}{\partial x^k} A'_m.$$

По аналогии можно также записать произведение контра- и ковариантного вектора.

Определение 6: Контравариантным тензором второго ранга T^{ik} *называются величины, которые преобразуются как произведение двух контравариантных векторов.*

$$T^{ik} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l} \frac{\partial x^k}{\partial x'^m} T'^{lm}.$$

Определение 7: Ковариантным тензором второго ранга T_{ik} *называются величины, которые преобразуются как произведение двух ковариантных векторов.*

$$T_{ik} = \frac{\partial x'^l}{\partial x^i} \frac{\partial x'^m}{\partial x^k} T'_{lm}.$$

Существуют исключения, например, когда постоянная величина преобразуется по правилам тензора.

Пример 4 Символ Кронекера δ^i_k — постоянная величина. Однако он является контра- и ковариантным тензором второго ранга. Докажем это.

$$\delta^i_k{}' = \frac{\partial x'^i}{\partial x^l} \frac{\partial x^m}{\partial x'^k} \delta^l_m = \frac{\partial x'^i}{\partial x^l} \frac{\partial x^l}{\partial x'^k} = \frac{\partial x'^i}{\partial x'^k} = \delta^i_k$$