ЛЕКЦИЯ 3

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ СТО. МЕХАНИКА. СООТНОШЕНИЕ ЭЙНШТЕЙНА

1. Математический аппарат СТО

На прошлой лекции говорилось о том, что существуют два типа векторов:

- **Контравариантные** dx^i, которые преобразуются как дифференциалы координат;
- **Ковариантные** $\frac{\partial \phi}{\partial x^i}$, которые преобразуются как градиент скалярной функции;

Кроме того, существуют тензоры более высокого ранга, которые преобразуются как произведения соответствующих векторов. Например, тензор

$$A^{\overbrace{iklm\ldots}^{r_1}}{}_{\underbrace{prst\ldots}_{r_2}}$$

должен преобразовываться как произведение r_1 контравариантных и r_2 ковариантных векторов.

Определение 8: *Сумма $r = r_1 + r_2$ называется **рангом тензора**.* ♣

Пусть есть тензор четвертого ранга $A^{ik}{}_{lm}$. Для того, чтобы записать преобразование этого тензора к новой системе координат, рекомендуется соблюдать следующую последовательность действий (на примере тензора четвертого ранга):

1. Не расставляя индексы, запишем частные производные r раз подряд. Тензору в штрихованной системе координат присваиваем новые индексы, по которым будем проводить суммирование

$$A^{ik}{}_{lm} = \frac{\partial x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}A'^{pr}{}_{st}.$$

2. Для контравариантных векторов расставляем r_1 штрихованных индексов у знаменателей дробей, для ковариантных — r_2 штрихованных индексов у числителей дробей
$$A^{ik}{}_{lm} = \frac{\partial x}{\partial x'^p}\frac{\partial x}{\partial x'^r}\frac{\partial x'^s}{\partial x}\frac{\partial x'^t}{\partial x}A'^{pr}{}_{st}.$$
3. Для контравариантных векторов расставляем r_1 нештрихованных индексов у числителей оставшихся дробей, а для ковариантных — r_2 нештрихованных индексов у знаменателей оставшихся дробей. Окончательное преобразование записывается в виде:
$$A^{ik}{}_{lm} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^p}\frac{\partial x^k}{\partial x'^r}\frac{\partial x'^s}{\partial x^l}\frac{\partial x'^t}{\partial x^m}A'^{pr}{}_{st}. \tag{3.1}$$

Запишем несколько тривиальных **свойств преобразований тензоров** к новой системе координат:

Свойство 1 $C \cdot A^{ik}{}_{lm} = B^{ik}{}_{lm}, \quad C = \text{const}.$ ∗

Свойство 2 $A^{ik}{}_{lm} + B^{ik}{}_{lm} = C^{ik}{}_{lm}$ (Тензоры должны быть одного ранга!). ∗

Свойство 3 Если тензор в какой-то системе координат равен нулю, то он тождественно равен нулю в любой другой системе координат (это следует, например, из преобразования (3.1)) ∗

Теорема 1 Если два тензора равны в одной системе координат, то они равны в любой другой системе координат. ∗

Док-во: Предположим, что два тензора равны в некоторой системе координат:
$$A^{ik\dots}{}_{lm\dots} = B^{ik\dots}{}_{lm\dots}.$$
Тогда, по свойству 2, их разность — тоже тензор
$$A^{ik\dots}{}_{lm\dots} - B^{ik\dots}{}_{lm\dots} = 0,$$
а по свойству 3 она равна нулю в любой системе координат. Поэтому
$$A'^{ik\dots}{}_{lm\dots} = B'^{ik\dots}{}_{lm\dots},$$
что и требовалось доказать. ■

Согласно принципу относительности **??**, физические законы одинаковы в двух системах координат, одна из которых движется относительно другой равномерно и прямолинейно. Любой физический закон может быть записан в виде равенства тензоров. А поскольку из теоремы 1 видно, что равенство тензоров сохраняется в любой системе координат становится ясно, что в специальной теории относительности все физические законы должны быть записаны в тензорных величинах.

Определение 9: *Пусть есть тензор четвертого ранга $A^{ik}{}_{lm}$ и пусть $k = m$. Операцией* ***упрощения*** *этого тензора назовем суммирование по одному верхнему и нижнему индексу:*
$$A^{ik}{}_{lk} = B^{i}{}_{l}.$$

Покажем, что в результате операции упрощения получается тензор меньший рангом на два. В соответствии с (3.1)

$$A^{ik}{}_{lk} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^p}\frac{\partial x^k}{\partial x'^r}\frac{\partial x'^s}{\partial x^l}\frac{\partial x'^t}{\partial x^k}A'^{pr}{}_{st}.$$

Выделим те два сомножителя, где есть индекс k:

$$\frac{\partial x'^t}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial x'^r} = \frac{\partial x'^t}{\partial x'^r} = \delta^t_r,$$

поскольку t и r — независимые переменные. Получается, что

$$A^{ik}{}_{lk} = B^i{}_l = \frac{\partial x^i}{\partial x'^p}\frac{\partial x'^s}{\partial x^l}\delta^t_r A'^{pr}{}_{st} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^p}\frac{\partial x'^s}{\partial x^l}A'^{pr}{}_{sr}.$$

Но $A'^{pr}{}_{sr} = B'^p{}_s$, поэтому окончательная запись примет вид

$$B^i{}_l = \frac{\partial x^i}{\partial x'^p}\frac{\partial x'^s}{\partial x^l}B'^p{}_s,$$

что в точности является преобразованием тензора второго ранга. Следовательно, в результате операции упрощения получается тензор, меньший исходного рангом на 2.

Умножим контравариантный тензор на ковариантный:

$$A^i\, B_k = C^i{}_k.$$

Если упростить полученный тензор второго ранга, получим тензор нулевого ранга — скаляр.

***Определение 10: Скалярным произведением** в пространстве Минковского называется произведение контравариантного вектора на ковариантный.* ♣

Можем получить скаляр и в более общем случае. Например, произведение ковариантного тензора второго ранга A_{ik} и двух контравариантных векторов — скаляр.

$$A_{ik}\, B^i\, C^k = \text{const} \tag{3.2}$$

Теорема 2 Пусть есть произвольный контравариантный вектор X^i и некая величина Y_i, природа которой неизвестна. Пусть также известно, что $X^i\, Y_i$ — некая скалярная величина. Тогда Y_i — ковариантный вектор. *

Док-во:

$$X^i\, Y_i = X'^k Y'_k = \frac{\partial x'^k}{\partial x^l}X^l\, Y'_k.$$

Воспользуемся тем, что X^l — произвольный вектор. Будем считать, что это однокомпонентный вектор:

$$X^l = \begin{cases} 1, & l = m \\ 0, & l \neq m. \end{cases}$$

Тогда при суммировании останется только случай, когда $i = m$:

$$Y_m = \frac{\partial x'^k}{\partial x^m} Y'_k.$$

Получили, что неизвестная величина Y_i преобразуется как ковариантный вектор. Следовательно, она им и является.

Аналогично можно доказать любое обобщение этой теоремы. Например, для равенства (3.2) можно доказать, что если

1. A_{ik} — величина, природа которой неизвестна,
2. B^i и C^k — контравариантные вектора
3. $A_{ik}\, B^i\, C^k$ — скаляр,

то A_{ik} — ковариантный тензор второго ранга.

Пусть в некоторой системе координат частица сместилась на бесконечно малое dx^i:

$$dx^0 = c\,dt, \qquad dx^1 = dx, \qquad dx^2 = dy, \qquad dx^3 = dz.$$

Квадрат интервала этого бесконечно малого смещения:

$$dS^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

есть некая квадратичная форма для дифференциалов. Можем записать ее в виде

$$dS^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k,$$

где $g_{00} = 1, \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1.$

То есть, g_{ik} можем записать в виде матрицы:

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

Квадрат интервала dS^2 — скалярная величина, а dx^i и dx^k — произвольные смещения. Следовательно, по теореме 2 $g_{ik}\, dx^i$ — ковариантный вектор, а значит, в силу той же теоремы, g_{ik} — тензор.

Определение 11: *Тензор g_{ik} называется* ***метрическим тензором****.* ♣

В декартовой инерциальной системе координат метрический тензор имеет постоянные метрические коэффициенты (подобно примеру 4, в котором мы выяснили, что символ Кронекера δ_i^k постоянно определен, но преобразуется как тензор).

Проверим, что метрические коэффициенты при преобразованиях Лоренца будут преобразовываться как тензоры, хотя они остаются постоянными коэффициентами. Например, для g_{00}:

$$g_{00} = \frac{\partial x^l}{\partial x'^0} \frac{\partial x^m}{\partial x'^0} g_{lm}.$$

Преобразования Лоренца таковы, что от координаты x^0 будут зависеть только нулевая координата и первая, поэтому l и m будут сначала оба равны 0, а потом оба равны 1 (в случае, когда $l \neq m$ компонента тензора g_{lm} будет равна нулю).

$$g_{00} = \left(\frac{\partial x^0}{\partial x'^0}\right)^2 g_{00} + \left(\frac{\partial x^1}{\partial x'^0}\right)^2 g_{11} = \left(\frac{\partial x^0}{\partial x'^0}\right)^2 - \left(\frac{\partial x^1}{\partial x'^0}\right)^2.$$

Подставив в преобразования Лоренца (2.1) $t = \frac{x^0}{c}, x = x^1$ и для штрихованных координат $t' = \frac{x'^0}{c}, x' = x'^1$, получим:

$$x^0 = c\frac{\frac{x'^0}{c} + \frac{v}{c^2}x'^1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad x^1 = \frac{x'^1 + \frac{v}{c}x'^0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Нетрудно показать, что

$$\frac{\partial x^0}{\partial x'^0} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad \frac{\partial x^1}{\partial x'^0} = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

и, следовательно, компонента метрического тензора

$$g_{00} = \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}} = 1,$$

что и требовалось доказать. Аналогично можно получить, что значения остальных компонент метрического тензора сохраняются при преобразовании координат.

Благодаря тому, что в пространстве Минковского в любой системе координат сохраняется интервал, мы определили, что существует метрический тензор gik.

Метрический тензор является основой общей теории относительности. Пусть есть однородное гравитационное поле (например — падающий лифт). Эта система координат инерциальна, поскольку в ней гравитационное поле Земли компенсируется падением. Перейдем от этой системы координат к покоящейся, тогда $dS^2 = g_{ik}\,dx^i\,dx^k$, но коэффициенты g_{ik} будут другие.

Определение 12: Гипотеза Эйнштейна *— гравитационное поле описывается метрическим тензором.* ♣

Метрический тензор позволяет установить соотношение между ковариантными и контравариантными векторами. Обычно вектора обозначают сверху стрелкой, но мы условимся 4-вектора обозначать нижним подчеркиванием. Пусть есть контравариантный вектор $\underline{A}^i$:

$$\underline{A}^i = (A^0, \vec{A}),$$

где $A^1 = A_x; A^2 = A_y; A^3 = A_z$.

Контравариантному вектору $\underline{A}^k$ можем сопоставить ковариантный $\underline{A}_i$ по следующему правилу:

$$\underline{A}_i = g_{ik}A^k.$$

Записав покомпонентно, получим:

$$\underline{A}_l = \begin{cases} g_{00}A^0 = A^0, & l = 0 \\ g_{ll}A^l = -A^l, & l = 1, 2, 3 \end{cases}$$

Следовательно, ковариантный вектор будет иметь вид:

$$\underline{A}_i = (A^0, -\vec{A}).$$

Как уже говорилось ранее, в евклидовом пространстве и декартовой системе координат нет разницы между контравариантными и ковариантными компонентами. В псевдоевклидовом пространстве Минковского, как оказалось, разница есть только для пространственных компонент.

Воспользовавшись определением 10 скалярного произведения двух векторов, можем записать:

$$\underline{AB} = A^i B_i = A^0 B^0 - \vec{A}\vec{B} = g_{ik} A^i B^k = A_i B^i,$$

следовательно, скалярное произведение симметрично.

Квадрат вектора — скалярное произведение вектора с самим собой:

$$\underline{A}^2 = A^i A_i = (A^0)^2 - (\vec{A})^2$$

Описанного выше математического аппарата достаточно, чтобы перейти к механике специальной теории относительности.

2. Механика СТО. Соотношение Эйнштейна

В нерелятивистской механике выполнялось уравнение Ньютона:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{f},$$

где нерелятивистский импульс $\vec{p}_{нр} = m\vec{v}$.

Это уравнение инвариантно относительно поворотов, так как вектор силы и вектор импульса преобразуются одинаково. Однако, это уравнение не удовлетворяет принципу относительности хотя бы потому, что в нем нет преобразования времени. Получается, что уравнение Ньютона, проверенное в сотнях тысяч механических систем, требует поправки.

Как должно выглядеть исправленное уравнение Ньютона? Очевидно, оно должно представлять собой равенство двух векторов. Введем вектор **4-скорости**:

$$\underline{U}^i = \frac{dx^i}{d\tau}, \tag{3.3}$$

где $dS = c\,d\tau$.

Почему U^i — 4-вектор? По определению dx^i — контравариантный вектор, а $d\tau \sim dS$, который является скаляром. Поэтому, по свойству 1 U^i — контравариантный вектор.

Напомним, что $d\tau$ — промежуток времени в собственной (связанной с движущейся частицей) системе координат, которое выражается через время в лабораторной системе координат так:

$$d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Запишем уравнение (3.3) покомпонентно:

$$U^0 = \frac{c\,dt}{dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$U^1 = \frac{dx}{dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Компоненты U^2 и U^3 будут отличаться от U^1 тем, что у них в числителе будет стоять v_y и v_z соответственно. Таким образом, контравариантный вектор 4-скорости

$$\underline{U}^i = \left(\frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right), \tag{3.4}$$

тогда ковариантная 4-скорость запишется в виде

$$\underline{U}_i = \left(\frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, -\frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right).$$

Квадрат 4-скорости — скалярная величина. Найдем его:

$$\underline{U}^2 = U_i U^i = \frac{c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = c^2. \tag{3.5}$$

Можно также ввести вектор **4-ускорения** $\underline{W}^i$:

$$\underline{W}^i = \frac{dU^i}{d\tau}. \tag{3.6}$$

4-ускорение — контравариантный вектор. Доказательство аналогично приведенному выше для 4-скорости.

Покажем, что скалярное произведение $W^i U_i = 0$. Всегда можем записать, что, согласно (3.5)

$$g_{ik} U^i U^k = c^2.$$

Продифференцировав это соотношение по τ, получим:

$$g_{ik}(W^i U^k + U^i W^k) = 0,$$

и, поскольку оба слагаемых в скобке одинаковы, а их сумма равна нулю, $W^i U_i = 0$.

Из тех же соображений, $\underline{W}^2 = W^i W_i$ должно быть постоянной величиной. Чтобы найти ее, вычислим W^i в системе координат, где $v = 0$ ($\frac{dv}{d\tau}$ при этом может быть не равным нулю). При дифференцировании временной компоненты (3.4) по τ, в числителе появится скорость v, и, следовательно, $W^0 = 0$. При дифференцировании пространственной компоненты (3.4) как сложной функции, из двух слагаемых то, где содержится производная корня — обнулится, поэтому:

$$W^i = \frac{dU^i}{d\tau}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\Bigg|_{v=0} = \frac{dU^i}{d\tau}\Bigg|_{v=0}$$

в собственной системе координат. Следовательно, пространственная компонента 4-ускорения пример вид:

$$W^i\big|_{v=0} = (0, \vec{W}), \tag{3.7}$$

и, соответственно

$$\underline{W}^2 = W^i W_i = -(\vec{W})^2.$$

Итак, мы хотим поправить уравнения Ньютона так, чтобы при этом соблюдалось **два условия**:

- Получившиеся уравнения должны быть инвариантны относительно преобразований Лоренца;
- При $v \ll c$ получившиеся уравнения должны переходить в классические уравнения Ньютона.

В соответствии с (3.4) определим **4-импульс** системы:

$$\underline{P}^i = m\underline{U}^i = \left(\frac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right). \tag{3.8}$$

Заметим, что при $v \ll c$ пространственные компоненты 4-импульса переходят в классическую формулу для импульса $\vec{p} = m\vec{v}$. Поэтому можно предположить, что искомые уравнения записываются в виде:

$$\frac{d\underline{P}^i}{d\tau} = \underline{F}^i, \tag{3.9}$$

где $\frac{d\underline{P}^i}{d\tau}$ — 4-вектор (по свойству 1, поскольку m и $d\tau$ — скаляры),
$\underline{F}^i$ — 4-вектор (поскольку в левой части записан 4-вектор), называемый **4-силой**.

Получившиеся уравнения (3.9) инвариантны относительно преобразований Лоренца. Для пространственных компонент получившихся уравнений примем

$$F^i = \frac{f^i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\vec{f}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{3.10}$$

Ранее было получено, что

$$\vec{P} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad d\tau = dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

Тогда для трех пространственных уравнений в (3.9) получим:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{f}, \tag{3.11}$$

то есть классическое уравнение Ньютона в векторном виде (но импульс в этом уравнении — релятивистский).

Пользуясь (3.6) и (3.7), можем записать уравнения (3.11) в виде:

$$m\vec{W} = \vec{F}.$$

Рассмотрим отдельно временную ($i = 0$) компоненту в (3.9). 4-сила пропорциональна 4-ускорению, а поскольку 4-скорость ортогональна 4-ускорению, можем записать:

$$F^i U_i = 0.$$

Следовательно,

$$F^0 U^0 - \vec{F}\vec{U} = 0 \quad \Rightarrow \quad F^0 = \frac{\vec{F}\vec{U}}{U^0}.$$

Воспользовавшись (3.4) и (3.10), получим выражение для временной компоненты 4-силы:

$$F^0 = \frac{\frac{\vec{f}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}{\frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} = \frac{\vec{f}\vec{v}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

С учетом выражения для F^0 запишем уравнение (3.9) для временной компоненты:

$$\frac{dP^0}{dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\vec{f}\vec{v}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

из которого сразу же следует, что

$$c\frac{dP^0}{dt} = \vec{f}\vec{v}. \tag{3.12}$$

Заметим, что $\vec{f}\vec{v}$ — работа в единицу времени, идущая на увеличение энергии частицы. Стало быть, **энергия частицы**

$$\varepsilon = cP^0,$$

и, воспользовавшись (3.8), получим:

$$\varepsilon = cP^0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{3.13}$$

Прежде чем двигаться дальше, подведем промежуточные итоги нашей работы. Согласно формулам (3.8), (3.13) 4-импульс в (3.9) имеет вид:

$$\underline{P}^i = (\frac{\varepsilon}{c}, \vec{P}), \qquad \varepsilon = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad \vec{P} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{3.14}$$

Уравнение (3.9), в соответствии с (3.11), (3.12) распадается на систему двух уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{P}}{dt} = \vec{f}, \\ \dfrac{d\varepsilon}{dt} = \vec{f}\vec{v}, \end{cases} \tag{3.15}$$

но при этом надо понимать, что первое уравнение этой системы — векторное (для трех пространственных компонент), а второе уравнение — скалярное (для временной компоненты).

Поделив энергию на импульс, получим:

$$\frac{\varepsilon}{\vec{P}} = \frac{c^2}{\vec{v}} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \frac{c^2\vec{P}}{\varepsilon}.$$

Это соотношение показывает, что энергия имеет размерность импульса, умноженного на скорость:

$$[P \cdot c] = [\varepsilon].$$

Попробуем записать выражение для энергии не через скорость, а через импульс. Домножив левую и правую часть (3.5) на квадрат массы, получим:

$$m^2\underline{U}^2 = \underline{P}^2 = m^2c^2,$$

с другой стороны, из (3.14) квадрат импульса определяется как:

$$\underline{P}^2 = \frac{\varepsilon^2}{c^2} - \vec{P}^2.$$

Из этих двух соотношений получается очень важная формула связи квадрата энергии и квадрат импульса частицы:

$$\varepsilon^2 = c^2(\vec{P}^2 + m^2c^2). \tag{3.16}$$

Извлекая из обеих частей уравнения (3.16) корень по формальным правилам, получим

$$\varepsilon = \pm c\sqrt{\vec{P}^2 + m^2c^2}.$$

В этом соотношении отрицательные энергии недопустимы. Представим, что частица могла бы иметь отрицательную энергию. Тогда, сталкиваясь с другой частицей, она могла бы передавать ей энергию, и абсолютное значение отрицательной энергии увеличивалось бы. Мы бы получили вечный двигатель.

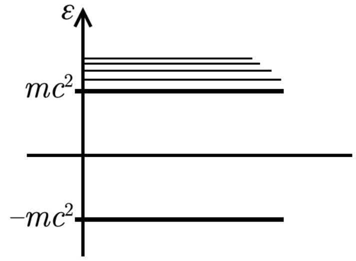

Рис. 3.1

Когда мы рассуждаем с позиции классической релятивистской механики, запрет отрицательных энергий можно объяснить и по-другому. Как видно из (3.16), положительные энергии начинаются с величины mc^2, а отрицательные — с величины $-mc^2$ (см. рис. 3.1). Получающаяся щель между энергиями непреодолима с позиции классической (не квантовой) механики, поскольку скачкообразные изменения параметров в классической механике запрещены.

В квантовой механике скачкообразные переходы возможны, поэтому, вообще говоря, в квантовой механике нельзя просто запретить существование отрицательных энергий. Это затруднение преодолели следующим образом: движение частиц с отрицательной энергией начали интерпретировать как движение античастиц с положительными энергиями. Таким образом, можем сформулировать утверждение.

Утверждение 3 Из свойств пространства Минковского вытекает существование античастиц, симметрия между частицами и античастицами. *

Но, как уже было сказано выше, в классической релятивистской механике отрицательные энергии запрещены, поэтому окончательно получим формулу, выражающую энергии частицы через ее импульс:

$$\varepsilon = c\sqrt{\vec{P}^2 + m^2c^2}. \tag{3.17}$$

Подставив первое уравнение системы (3.15) во второе, получим:

$$d\varepsilon = \vec{v}\,d\vec{p}.$$

Перейдем к нерелятивистскому ($v \ll c$) приближению в формуле (3.17). В соответствии с (3.14)

$$\varepsilon = c\sqrt{\frac{m^2v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} + m^2c^2} = mc^2\sqrt{\frac{\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}} + 1} = mc^2\sqrt{\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Разложим это выражение в ряд, учитывая, что $v \ll c$:

$$\varepsilon = mc^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = mc^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{v^4}{c^4}+\ldots\right),$$

Не учитывая члены более высоких порядков, получим:

$$\varepsilon = mc^2 + \frac{mv^2}{2} + \frac{3}{8}\frac{mv^4}{c^2}. \tag{3.18}$$

В классической механике разность кинетических энергий частицы была равна работе, совершенной этой частицей. То есть кинетическая энергия была определена с точностью до постоянной, которая в разности сокращалась.

Из формулы (3.18) видно, что даже при нулевой скорости частица обладает энергией $\varepsilon_0 = mc^2$, называемое **энергией покоя частицы**. Это и есть соотношение Эйнштейна.

Под энергией обычно понимают способность тела совершать работу. Казалось бы, покоящаяся частица не может совершить работы. Однако, если происходит распад или объединение частиц, энергия покоя может быть задействована.

Рассмотрим простейший случай — молекулу HCl. Она, очевидно, состоит из атомом H и Cl. Энергия покоя этой молекулы, с одной стороны, равна:

$$\varepsilon_0 = m_{\text{HCl}}\, c^2,$$

а с другой стороны она равна энергии покоя составляющих эту молекулу атомов и энергии диссоциации молекулы D, которая отрицательна:

$$\varepsilon_0 = m_{\text{H}}\, c^2 + m_{\text{Cl}}\, c^2 - D.$$

Поскольку левые части этих двух выражений равны, следовательно, равны и их правые части. Приравняем их и, поделив обе части получившегося равенства на c^2, получим:

$$m_{\text{HCl}} = m_{\text{H}} + m_{\text{Cl}} - \frac{D}{c^2}. \tag{3.19}$$

Выражение (3.19) есть не что иное, как поправленный закон сохранения массы веществ в реакции (**закон Ломоносова – Лавуазье**). В конце XIX века венгерский физик Этвеш сконструировал очень точные крутильные весы, на которых проверил, в частности, закон Ломоносова – Лавуазье с точностью до 10^{-7}. Если бы он увеличил точность еще на два порядка, то он увидел бы расхождение, поскольку

$$\left.\begin{array}{l} m_{\text{H}}c^2 \sim 1\ \text{ГэВ} \\ D \sim 5\ \text{эВ} \end{array}\right| \Rightarrow \quad \delta = 5 \cdot 10^{-9}.$$

Таким образом, при соединении или распаде частиц

$$\Delta\varepsilon = \Delta m c^2.$$

В ядерной физике энергия связи значительно больше, $\delta \sim 10^{-3}$.

Пример 5 Солнце каждую секунду излучает $I_\odot = 4 \cdot 10^{33}\, \frac{\text{эрг}}{\text{сек}}$. Как известно, на Солнце идет несколько типов различных термоядерных реакций, которые все вместе можно записать так:

$$4p + 2e^- \to {}^4\text{He} + 2\nu_e + Q,$$

где $Q \simeq 30$ МэВ.

Получается, что при такой светимости на Солнце $m \simeq 6 \cdot 10^8$ тонн водорода сгорает ежесекундно. Масса Солнца $M_\odot \simeq 2 \cdot 10^{33}$ грамма, поэтому водорода хватит еще на несколько миллиардов лет.

Испускание нейтрино в реакциях на Солнце было обнаружено только в конце XX века. Когда начали регистрировать солнечные нейтрино, оказалось, что регистрируется в несколько раз меньше частиц, чем предполагалось. Этот эффект был вызван тем, что приборы регистрировали только электронные нейтрино. Была создана аппаратура для регистрации разных типов нейтрино, и было выяснено, что электронные нейтрино могут частично переходить в нейтрино других типов. Оказалось, что текущая модель Солнца не противоречит эксперименту.

Солнечная постоянная:

$$q = \frac{I_\odot}{4\pi R^2} = 2\,\frac{\text{кал}}{\text{мин}\cdot\text{см}^2}.$$

Зная Q и q, можно посчитать поток нейтрино на Землю:

$$J_\nu = 6\cdot 10^{10}\,\frac{\nu}{\text{см}^2\cdot\text{сек}}.$$

Это число согласуется с экспериментальными значениями. *