ЛЕКЦИЯ 4

ИМПУЛЬС. ЭФФЕКТИВНАЯ МАССА. УПРУГИЕ РЕАКЦИИ

На прошлой лекции мы выяснили, что, согласно (3.14)

$$\underline{P} = \left(\frac{\varepsilon}{c}, \vec{P}\right).$$

Почему этот вектор — 4-импульс? Напомним, что контравариантным вектором dx^i называются четыре величины, которые при преобразовании координат преобразуются как дифференциалы координат. Из свойства 1 мы знаем, что результат умножения 4-вектора на скаляр — 4-вектор. Следовательно, в результате умножения 4-вектора скорости

$$\underline{U}^i = \frac{dx^i}{dS}, \quad \text{где } dS = c\, d\tau$$

на массу получим 4-импульс.

1. Импульс. Ультрарелятивистское приближение

В дальнейшем будем пользоваться **системой единиц, в которой c = 1**. Это позволит сократить объем выкладок. В окончательных результатах, воспользовавшись анализом размерности, всегда можно восстановить результат. Итак, в случае, когда $c = 1$, выражение (3.16) примет вид:

$$\underline{P}^2 = \varepsilon^2 - \vec{P}^2 = m^2.$$

Рассмотрим пример, который показывает, насколько удобно при решении задач пользоваться 4-векторами.

Пример 6 Пусть частица массой M распадется на две частицы массой m_1 и m_2 (см. рис. 4.1):

$$M \to m_1 + m_2.$$

Найдем энергию распавшихся частиц.

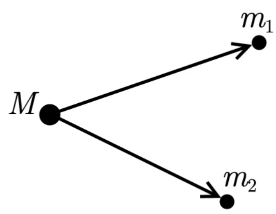

Рис. 4.1

В общей физике для решения подобной задачи нужно было бы записать законы сохранения импульса и энергии, перейти в систему, где частица массой M покоится, выразить энергию через импульс и долго решать получившиеся иррациональные уравнения. В терминах 4-векторов решение гораздо проще.

4-импульс системы сохраняется, поэтому:

$$\underline{P} = \underline{p}_1 + \underline{p}_2. \tag{4.1}$$

Надо понимать, что уравнение (4.1) содержит, на самом деле, четыре равенства: закон сохранения энергии и закон сохранения импульса в векторной форме.

Если частица M покоилась, то:

$$\underline{P} = (M, 0), \qquad \underline{p}_1 = (\varepsilon_1, \vec{p}_1), \qquad \underline{p}_2 = (\varepsilon_2, \vec{p}_2). \tag{4.2}$$

Из равенства пространственных компонент получаем, что $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$, при этом $\underline{p}_1^2 = m_1^2$, $\underline{p}_2^2 = m_2^2$.

В соотношении (4.1) перенесем $\underline{p}_1$ в левую часть

$$\underline{P} - \underline{p}_1 = \underline{p}_2$$

и возведем получившееся выражение в квадрат. Тогда получим:

$$\underline{P}^2 - 2\underline{P}\underline{p}_1 + \underline{p}_1^2 = \underline{p}_2^2.$$

Подставив в это соотношение выражения для 4-импульсов (4.2), получим:

$$M^2 - 2M\varepsilon_1 + m_1^2 = m_2^2 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_1 = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M}.$$

Для ε_2 в получившемся выражении нужно m_1^2 взять с отрицательным знаком, а m_2^2 — наоборот, с положительным.

Ясно, что $\varepsilon_1 \geqslant m_1$ (равенство достигается, когда частица покоится). Следовательно, можем записать:

$$\varepsilon_1 - m_1 = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2 - 2Mm_1}{2M} = \frac{(M - m_1)^2 - m_2^2}{2M}.$$

Для того, чтобы это выражение было больше либо равно нулю,

$$(M - m_1) - m_2 \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad M \geqslant m_1 + m_2.$$

Следовательно, если масса исходной частицы не меньше, чем сумма масс частиц, на которые она распалась, то такой распад возможен: энергия покоя частицы массой M перейдет в кинетическую энергию распавшихся частиц. *

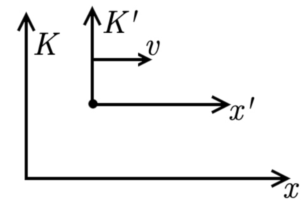

Рис. 4.2

Как уже было сказано ранее, 4-импульс это 4-вектор, поэтому он должен преобразовываться как дифференциалы координат, т.е. как координаты. Пусть есть две системы K и K', одна из которых движется относительно другой со скоростью $\vec{v}$ (см. рис. 4.2). Можем записать **преобразование 4-импульса к новой системе координат**:

$$p'_x = \frac{p_x - v\varepsilon}{\sqrt{1-v^2}}, \quad \varepsilon' = \frac{\varepsilon - vp_x}{\sqrt{1-v^2}}, \quad p'_y = p_y, \quad p'_z = p_z. \tag{4.3}$$

Воспользуемся правилом размерностей, чтобы внести в эти соотношения скорость света c. На прошлой лекции мы выяснили, что импульс имеет размерность энергии, деленной на скорость:

$$[p] = \frac{[\varepsilon]}{[c]},$$

поэтому в выражении для ε' числитель стоит оставить без изменений, а в выражении для p'_x в числителе скорость нужно разделить на квадрат скорости света. В знаменателях обоих этих выражений квадрат скорости нужно поделить на квадрат скорости света. Окончательно получим:

$$p'_x = \frac{p_x - \frac{v}{c^2}\varepsilon}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad \varepsilon' = \frac{\varepsilon - vp_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad p'_y = p_y, \qquad p'_z = p_z.$$

На прошлой лекции мы разобрали переход к нерелятивистскому случаю и получили выражение для энергии покоя частицы. Рассмотрим теперь противоположный **ультрарелятивистский случай**, когда:

$$|\vec{p}| \gg mc.$$

В этом случае пользоваться формулой для энергии

$$\varepsilon = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}} \tag{4.4}$$

не очень хорошо, так как $v/c \ll 1$. Лучше пользоваться формулой

$$\varepsilon = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \simeq |\vec{p}| \left(1 + \frac{m^2}{2|\vec{p}|^2}\right) = |\vec{p}| + \frac{m^2}{2|\vec{p}|}. \tag{4.5}$$

Как видно, в отличие от выражения (4.4), эта формула применима, если частица обладает нулевой массой. Если масса частицы отлична от нуля, но мала по сравнению с импульсом, то энергия частицы порядка модуля импульса. Из формулы (4.5) видно, что

$$\varepsilon = |\vec{p}|, \quad \text{при } m = 0,$$

или, если внести в это соотношение скорость света: $\varepsilon = |\vec{p}| \cdot c$.

Из прошлой лекции мы знаем, что скорость

$$\vec{v} = \frac{c^2 \vec{p}}{\varepsilon} = c\vec{n}$$

где $\vec{n}$ — некий единичный вектор.

Утверждение 4 Частица, обладающая нулевой массой, всегда будет двигаться со скоростью света. $*$

Ультрарелятивистское приближение оказывается полезным при решении задач. Рассмотрим

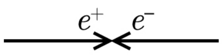

Рис. 4.3

его применение на примере реальной задачи.

Пример 7 В Швейцарии работал ускоритель LEP. Это был коллайдер, в котором сталкивались электроны и позитроны (см. рис. 4.3). Энергии электронного e^- и позитронного $e+$ пучка были одинаковы и равнялись $\varepsilon = 100$ ГэВ. Какова была скорость электронов?

По определению:

$$\varepsilon = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{mc^2}{\varepsilon}.$$

Возведя в квадрат левую и правую части этого равенства и разложив левую часть как разность квадратов, получим:

$$\left(1 - \frac{v}{c}\right)\left(1 + \frac{v}{c}\right) = \left(\frac{mc^2}{\varepsilon}\right)^2,$$

но в ультрарелятивистском случае $v/c \approx 1$, поэтому окончательно можем записать:

$$1 - \frac{v}{c} = \frac{1}{2}\left(\frac{mc^2}{\varepsilon}\right)^2. \tag{4.6}$$

$*$

Для электрона $m_e c^2 \sim 0,5$ МэВ, поэтому

$$\frac{mc^2}{\varepsilon} = \frac{0{,}5}{10^5} = 0{,}5 \cdot 10^{-5}.$$

Подставив это значение в (4.6), получим:

$$1 - \frac{v}{c} \simeq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot 10^{-10} = 1{,}25 \cdot 10^{-11}.$$

Скорость частиц практически не отличается от скорости света. Это косвенно подтверждает справедливость специальной теории относительности — если бы она была неверна, частицы не удалось бы ускорить до таких высоких энергий, ведь ускоряющие станции синхронизированы с полетом частицы.

Если бы мы посчитали скорость движения, например, позитронов относительно электронов, то получили бы:

$$1 - \frac{v}{c} \approx 10^{-22}.$$

Рассмотрим другой пример, в котором мы опять имеем дело с ультрарелятивист- ским

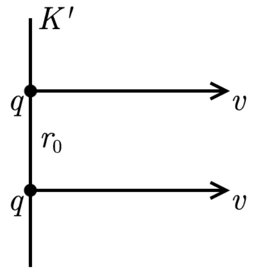

Рис. 4.4

случаем.

Пример 8 Пусть две частицы с зарядом q движутся параллельно друг другу с релятивистской скоростью $\vec{v}$ (см. рис.4.4). Найдем силу взаимодействия между частицами.

Если бы частицы покоились, то сила взаимодействия между ними описывалась бы законом Кулона:

$$F = \frac{q^2}{r_0^2}.$$

В специальной теории относительности уравнения движения, согласно (3.9), записываются в виде:

$$\frac{\underline{P}}{d\tau} = \underline{F}, \quad \text{где } \vec{F} = \frac{\vec{f}}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

В системе K', движущейся вместе с частицами, они покоятся, поэтому

$$F'_y = f'_y = \frac{q^2}{r_0^2}.$$

В силу преобразований Лоренца поперечные компоненты не преобразуются, поэтому можем записать:

$$F_y = \frac{f_y}{\sqrt{1 - v^2}} = F'_y = f'_y = \frac{q^2}{r_0^2},$$

следовательно

$$f_y = \frac{q^2}{r_0^2}\sqrt{1 - v^2},$$

то есть в ультрарелятивистском случае окажется, что сила взаимодействия между частицами практически равна нулю.

С точки зрения общей физики эти два заряда — два тока. При движении каждый из них создает магнитное поле, которое притягивает другой ток, поэтому сила отталкивания уменьшается. *

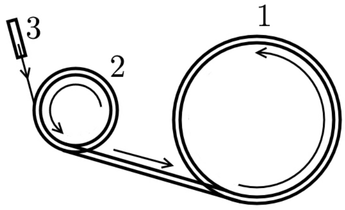

Рис. 4.5

Этот эффект имеет очень важное практическое значение. Рассмотрим устройство коллайдера (см. рис. 4.5). Чтобы в большом кольце (1) была хорошая интенсивность пучка частиц, этот пучок предварительно разгоняют в малом кольце (2) — бустере. На больших коллайдерах бустеров может быть несколько, например, перед малым кольцом часто располагают линейный бустер (3).

Как было показано в примере 8, частицы в пучке расталкиваются, что приводит к неустойчивости пучка. Благодаря поэтапному ускорению частиц при их попадании в большое кольцо сила отталкивания будет гораздо меньше, и пучок будет более устойчивый. В действительности, при ускорении частиц существуют резонансы, которые нарушают стабильность пучка, с ними приходиться бороться.

Перейдем к рассмотрению другого очень важного понятия.

2. Эффективная масса системы

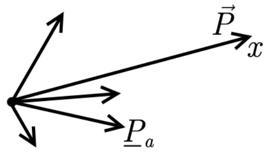

Рис. 4.6

Пусть имеется несколько частиц с различными импульсами (см. рис. 4.6). Обозначим 4-импульс a-ой частицы $\underline{P}_a$. Составим вектор

$$\underline{P} = \sum_a \underline{P}_a = (\varepsilon, \vec{P})$$

где $\varepsilon = \sum_a \varepsilon_a$ — суммарная энергия системы,

$\vec{P} = \sum_a \vec{P}_a$ — суммарный импульс системы.

Энергия каждой частицы $\varepsilon_a \leqslant |\vec{P}_a|$, поэтому суммарная энергия $\varepsilon \leqslant |\vec{P}|$. Равенство будет достигаться, когда выполнены два условия:

1. Все частицы безмассовые;

2. Все частицы движутся параллельно друг другу со скоростью света (если бы две частицы двигались непараллельно, то модуль импульса уменьшился бы).

Всегда можно выбрать систему координат, в которой суммарный импульс частиц будет равен нулю. Пусть суммарный импульс $\vec{P}$ направлен вдоль оси X неподвижной декартовой системы координат K. Введем декартову систему координат K', движущуюся вдоль оси X (см. рис. 4.7) Тогда, согласно (4.3), в этой системе координат

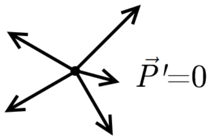

Рис. 4.7

$$P'_x = \frac{P_x - v\varepsilon}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad P'_y = P_y = 0, \qquad P'_z = P_z = 0,$$

следовательно по абсолютному значению $P_x = |\vec{P}|$.

Выбрав скорость так, что:

$$v = \frac{P_x}{\varepsilon} = \frac{P}{\varepsilon},$$

получим, что $P' = 0$

Итак, в системе K', движущейся относительно K со скоростью v, суммарный импульс оказывается равным нулю.

Определение 13: *Система координат, в которой суммарный импульс частиц равен нулю, называется* ***системой центра инерции****.* ♣

Определение 14: *Скорость движения системы центра инерции относительно неподвижной системы назовем* ***скоростью центра инерции****:*

$$\vec{v}_c = \frac{\vec{P}}{\varepsilon}$$

Найдем энергию системы в системе центра инерции. Квадрат 4-импульса $\underline{P}^2$ инвариантен относительно преобразования координат (поскольку это скалярное произведение 4-вектора $\underline{\mathrm{P}}$ с самим собой), поэтому:

$$\varepsilon^2 - \vec{P}^2 = \underline{P}^2 = \underline{P}'^2 = \varepsilon'^2 - \vec{P}'^2 = \varepsilon'^2,$$

следовательно,

$$\varepsilon'^2 = \varepsilon_c^2 = \varepsilon^2 - \vec{P}^2 = \underline{P}^2.$$

Получили энергию в системе центра инерции ε_c. Суммарный импульс в системе центра инерции равен нулю, поэтому система в целом покоится. А энергия покоящейся частицы равна mc^2. Поэтому энергию нашей системы в системе центра инерции можем записать в виде $M_{эф}c^2$, где $M_{эф}$ — **эффективная масса**. Итак,

$$M_{эф} = \varepsilon_c, \qquad M^2_{эф} = \underline{P}^2 = \varepsilon^2 - \vec{P}^2.$$

Понятие эффективной массы системы играет очень важную роль в физике высоких энергий.

Столкновение двух частиц можно рассматривать так (см. рис. 4.8):

1. Сначала две частицы сливаются, получается система с некоторой эффективной массой;

2. Далее эта эффективная масса распадается.

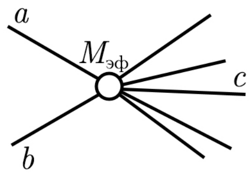

Рис. 4.8

Для того, чтобы эффективная масса распалась, она должна быть больше чем сумма масс частиц, на которые она распадается. Чтобы понять это, снова посмотрим на рисунок 4.7. В этой системе энергия будет минимальна, когда все частицы покоятся. В этом случае эффективная масса будет в точности равна сумме масс частиц:

$$(M_{эф})_{min} = \sum_c m_c.$$

Таким образом, **порог реакции** будет определяться тем, чтобы образовавшаяся в результате столкновения частиц эффективная масса была больше, чем сумма масс частиц, на которые эта эффективная масса распадется:

$$M_{эф} \geqslant \sum_c m_c.$$

Поскольку **эффективная масса — инвариант**, то для пучка частиц она будет минимальна, когда все частицы движутся с одинаковой скоростью в одинаковом направлении (в этом случае в системе центра инерции они все будут покоиться).

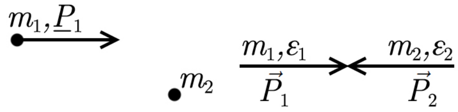

Рис. 4.9

Сравним две постановки задачи:

1. «**Фиксированная мишень**» (см. рис.4.9) — частица массой m_1 и 4-импульсом $\underline{P}_1$ налетает на покоящуюся частицу массой m_2.

2. «**Встречные пучки**» (см. рис.4.9) — две частицы с массами m_1 и m_2 и 4-импульсами $\underline{P}_1$ и $\underline{P}_2$ испытывают фронтальное столкновение.

В первом случае эффективная масса равна:

$$M^2_{эф} = (\underline{P}_1 + \underline{P}_2)^2 = \underline{P}_1^2 + 2\underline{P}_1\underline{P}_2 + \underline{P}_2^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2\varepsilon_1 m_2,$$

где $\underline{P}_1 = (\varepsilon_1, \vec{p}_1)$, $\underline{P}_2 = (m_2, 0)$.

Заметим, что если ε_1 растет, то квадрат $M_{эф}$ растет пропорционально ε_1, то есть эффективная масса $M_{эф}$ растет лишь пропорционально $\sqrt{\varepsilon_1}$. В ультрарелятивистском приближении $\varepsilon_1 \gg m_1$, $\varepsilon_2 \gg m_2$, поэтому

$$M^2_{эф} \simeq 2\varepsilon_1 m_2.$$

Казалось бы, эффективная масса должна линейно зависеть от ε_1, поскольку:

$$M^2_{\text{эф}} = (\underline{P}_1 + \underline{P}_2)^2 = (\varepsilon_1 + m_2, \vec{p}_1)^2 = (\varepsilon_1 + m_2)^2 - \vec{p}_1^{\,2},$$

но $\varepsilon_1^2 - \vec{p}_1^{\,2} = m_1^2$. В случае фиксированной мишени есть ненулевой импульс: кинетическая энергия налетающей частицы частично переходит в эффективную массу, а значительная ее доля — в импульс всей системы.

В случае встречных пучков $\underline{P}_1 = (\tilde{\varepsilon}_1, \tilde{\vec{p}}_1)$, $\underline{P}_2 = (\tilde{\varepsilon}_2, \tilde{\vec{p}}_2)$. Будем считать, что $\tilde{\vec{p}}_1 \uparrow\downarrow \tilde{\vec{p}}_2$, тогда эффективная масса:

$$M^2_{\text{эф}} = (\underline{P}_1 + \underline{P}_2)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2(\tilde{\varepsilon}_1\tilde{\varepsilon}_2 + |\tilde{\vec{p}}_1||\tilde{\vec{p}}_2|). \tag{4.7}$$

Как видно из этой формулы, из-за разнонаправленности импульсов вместо вычитания они складываются.

Для одинаковых импульсов:

$$M^2_{\text{эф}} = (\tilde{\varepsilon}_1 + \tilde{\varepsilon}_2, \tilde{\vec{p}}_1 - \tilde{\vec{p}}_2)^2 = (\tilde{\varepsilon}_1 + \tilde{\varepsilon}_2, 0)^2 = (\tilde{\varepsilon}_1 + \tilde{\varepsilon}_2)^2.$$

В ультрарелятивистском случае, когда $\tilde{\varepsilon}_1 \gg m_1$, $\tilde{\varepsilon}_2 \gg m_2$,

$$\tilde{\vec{p}}_1 \approx \tilde{\varepsilon}_1, \qquad \tilde{\vec{p}}_2 \approx \tilde{\varepsilon}_2,$$

и, следовательно, формула (4.7) примет вид:

$$M^2_{\text{эф}} \simeq 4\tilde{\varepsilon}_1\tilde{\varepsilon}_2.$$

Найдем, какой энергией должна обладать частица, налетающая на фиксированную мишень, чтобы эффективная масса получилась такой же, как и в случае столкновения на встречных пучках:

$$2m_2\varepsilon_1 = 4\tilde{\varepsilon}_1\tilde{\varepsilon}_2 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_1 = 2\tilde{\varepsilon}_1\frac{\tilde{\varepsilon}_2}{m_2}. \tag{4.8}$$

Поскольку $\tilde{\varepsilon}_2 \gg m_2$, то энергия ε_1 должна быть значительно больше, чем энергия на встречных пучках.

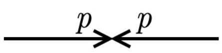

Рис. 4.10

Пример 9 На ускорителе LHC в данный момент сталкиваются встречные пучки протонов с энергией $3{,}5 \cdot 10^3$ ГэВ (см. рис. 4.10). При этом масса протона $m_p = 939$ МэВ $\approx$ 1 ГэВ.

Вычислим, какой энергией должен обладать протон, налетающий на неподвижный протон, чтобы эффективная масса в обоих случаях была одинаковая (то есть способность родить какие-то новые частицы была одинаковая в обоих столкновениях). По формуле (4.8) получим, что

$$\varepsilon_1 = 2 \cdot 3{,}5 \cdot 10^3 \text{ ГэВ}\frac{3{,}5 \cdot 10^3 \text{ ГэВ}}{1 \text{ ГэВ}} \simeq 25 \cdot 10^6 \text{ ГэВ} = 2{,}5 \cdot 10^{16} \text{ эВ}.$$

В ближайшее время трудно ожидать, что будут созданы ускорители, способные разогнать частицу до энергии 10^{16} эВ. Существуют проекты, в которых магнитное поле Земли используется для создания кольца в космосе, но на сегодняшний день они слишком дороги.

Частицы с энергией 10^{16}–10^{20} ГэВ очень редко встречаются в космических лучах. Порог в 10^{20} ГэВ обусловлен следующим явлением: протоны, ускоренные до очень высоких энергий, сталкиваются с фотонами реликтового излучения и теряют при этом энергию. Чем дальше от нас начал свою жизнь протон, тем сильнее он тормозится.

В настоящее время в Южной Америке на площади несколько сот квадратных километров установлены детекторы, регистрирующие протоны с очень высокими энергиями. Цель эксперимента — найти протоны с энергией $> 10^{20}$ Эв, чтобы показать, что такие частицы рождаются и на сравнительно небольшом расстоянии от Земли. К сожалению, такие частицы очень редки, в среднем за год детекторы регистрируют 2–3 штуки, поэтому поиски пока безуспешны. $*$

Итак, **первое применение эффективной массы** — определение порогов реакции:

$$(\underline{P}_1 + \underline{P}_2)^2 > \left(\sum_c m_c\right)^2$$

Другое важное применение понятия эффективной массы — обнаружение частиц с очень коротким временем жизни. Это применение эффективной массы привело к открытию большого числа нестабильных частиц, в результате чего была создана их систематика (наподобие таблицы Менделеева). Для объяснения систематики появилась гипотеза кварков, которая на данный момент уже вовсе не гипотеза, а подтвержденная многочисленными экспериментами

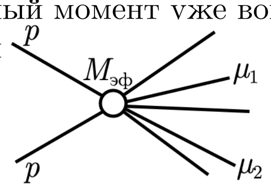

Рис. 4.11

Пусть сталкиваются два протона (см. рис. 4.11). В результате их столкновения образуется множество частиц, мы будем из всех этих частиц выбирать μ-мезоны: пусть в результате этой реакции родилось два μ-мезона. Для этих частиц будем измерять импульс.

Эффективная масса этих частиц:

$$M^2_{эф} = (\underline{p}_1 + \underline{p}_2)^2.$$

Построим график зависимости числа частиц, приходящихся на единицу эффективной массы $\frac{\Delta N}{\Delta M_{эф}}$ от эффективной массы (см. рис. 4.12).

Предположим, что два μ мезона произошли от распада некоторой частицы, называемой J/ψ частицей. Тогда на массе, соответствующей массе J/ψ частицы получим пик с некоторым экспериментальным разрешением.

Конечно, на графике будет существовать некоторый фон из-за μ-мезонов, возникших не в результате распада J/ψ частицы. Таким образом, по найденным пикам можно определить нестабильные частицы.

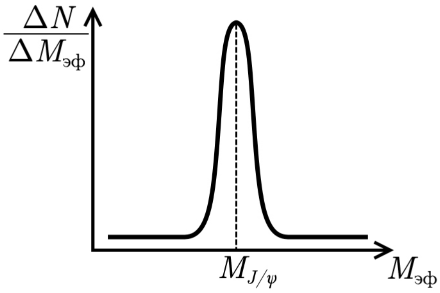

Рис. 4.12

Время жизни J/ψ частицы составляет порядка $\tau \sim 10^{-20}$ секунды, поэтому за время жизни она не успевает отлететь от места распада на сколько-нибудь значительное расстояние, но анализ продуктов ее распада позволять судить о самой частице.

Ширина пика в некоторой степени аппаратурная, но, если бы нам удалось улучшить аппаратуру, некоторая ширина у этой линии все равно сохранилась бы. Ширина пика $\Delta\Gamma$ связана со временем жизни частицы соотношением:

$$\Delta\Gamma\Delta\tau = \hbar,$$

где $\hbar$ — постоянная Планка.

Таким образом, измеряя эффективную массу мы может открыть нестабильные частицы, систематизировать их и изучать их свойства.

Пусть частица распалась на несколько частиц, например K-мезон распался на π-мезон, μ-мезон и нейтрино:

$$K^+ \to \pi^0\mu^+\nu, \quad \text{так как } K^+ = (u, \tilde{s}), \quad \tilde{s} = \tilde{u} + e^+\nu, \quad u + \tilde{u} = \pi^0,$$

где $\tilde{s}$ — антистранный кварк,
e^+ — позитрон,
ν — нейтрино.

Обозначим π-мезон индексом 1, μ-мезон индексом 2 и нейтрино индексом 3. Найдем максимальную энергию нейтрино. Когда мы рассматривали двухчастичный распад, число уравнений и неизвестных было одинаковым: импульсы двух частиц всегда были противоположны по направлению. В случае трехчастичного распада импульсы могут быть направлены по-разному (см. р

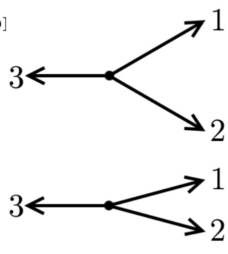

Рис. 4.13

Для того, чтобы в трехчастичном распаде найти энергию третьей (нейтрино) частицы, объединим первую и вторую частицы в некую эффективную массу $M_{эф(1+2)}$. Она будет зависеть от энергий частиц и от их угла разлета. Тогда у нас, по сути, реализуется двухчастичный распад и, согласно формулам для двухчастичного распада (см.

пример 6):

$$\varepsilon_3 = \frac{M^2 + m_3^2 - M^2_{эф(1+2)}}{2M}.$$

ε_3 максимальна, когда $M_{эф(1+2)}$ — минимальна. Но ее минимальное значение равно сумме масс первой и второй частиц поэтому:

$$(\varepsilon_3)_{max} = \frac{M^2 + m_3^2 - (m_1 + m_2)^2}{2M}.$$

Таким образом, объединив первую и вторую частицы в одну эффективную массу, получили выражение для энергии третьей. С физической точки зрения, эффективная масса двух частиц будет минимальна, когда они движутся в одном направлении с одинаковой скоростью.

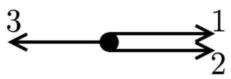

Рис. 4.14

Тогда становится понятно, как выглядит распад частиц при максимальной энергии третьей частицы (см. рис. 4.14): частицы 1 и 2 движутся в одном направлении с некоторой скоростью v, а третья частица движется в противоположном им направлении (поскольку по ЗСИ суммарный импульс должен быть равен нулю).

Рассмотрим теперь простейший тип реакций — **упругие реакции**.

3. Упругие реакции

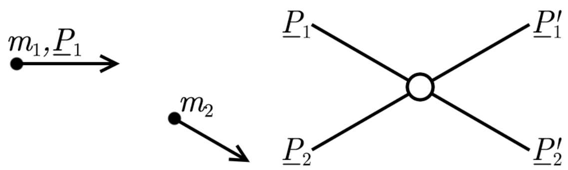

Рис. 4.15

Пусть на фиксированную мишень m_2 налетает частица с импульсом $\vec{p}_1$, энергией ε_1 и массой m_1 (см. рис. 4.15). Найдем, какую энергию может получить покоящаяся частица.

С точки зрения эффективной массы этот процесс можно представить следующим образом: частицы 1 и 2 с 4-векторами $\underline{P}_1$ и $\underline{P}_2$ соответственно объединяются в некую эффективную массу, которая затем распадается на частицы той же массы, но уже с 4-векторами $\underline{P}'_1$ и $\underline{P}'_2$ (см. рис. 4.15).

Должен соблюдаться закон сохранения энергии, поэтому:

$$\underline{P}_1 + \underline{P}_2 = \underline{P}'_1 + \underline{P}'_2, \tag{4.9}$$

а квадрат эффективной массы равен

$$M^2_{эф} = (\underline{P}_1 + \underline{P}_2)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2\varepsilon_1 m_2.$$

Наряду с эффективной массой, инвариантна будет и другая величина, называемая **квадратом переданного импульса** t. Перенеся в (4.9) все, что относится к первой частице, в левую часть, а все, что относится ко второй — в правую, получим:

$$t = (\underline{P}_1 - \underline{P}'_1)^2 = (\underline{P}_2 - \underline{P}'_2)^2.$$

Поскольку t — инвариант, можем вычислить его в любой системе координат, например, в покоящейся системе или в системе центра инерции. Вычислим $(\underline{P}_2 - \underline{P}'_2)^2$ в покоящейся системе:

$$t = m_2^2 + m_2^2 - 2\underline{P}'_2\underline{P}_2,$$

но $\underline{P}_2 = (m_2, 0)$, следовательно

$$t = 2m_2^2 - 2m_2\varepsilon'_2, \quad \Rightarrow \quad \varepsilon'_2 - m_2 = -\frac{t}{2m_2}. \tag{4.10}$$

где ε'_2 — энергия второй частицы после столкновения.

В системе центра инерции обе частицы имеют одинаковый по модулю и противоположный по направлению импульс $\vec{p}_c$ (см. рис. 4.16). Обозначим θ_c — угол рассеяния первой частицы. Условимся тильдой сверху обозначать энергии частиц в системе центра инерции. Вычислим t в системе центра инерции.

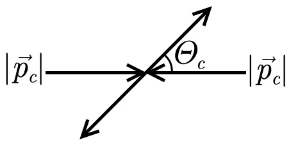

Рис. 4.16

В этой системе выполняется (4.9)

$$\underline{P}_1 + \underline{P}_2 = \underline{P} = \underline{P}'_1 + \underline{P}'_2.$$

Поскольку и до, и после столкновения импульсы равны по модулю и противоположны по направлению (то есть меняется только направление импульса, но не его абсолютная величина), легко видеть, что энергии частиц до и после столкновения равны:

$$\tilde{\varepsilon}'_1 = \tilde{\varepsilon}_1, \qquad \tilde{\varepsilon}'_2 = \tilde{\varepsilon}_2.$$

Тогда для первой частицы получим:

$$t = (\underline{\tilde{P}}'_1 - \underline{\tilde{P}}_1)^2 = (\tilde{\varepsilon}'_1 - \tilde{\varepsilon}_1)^2 - (\tilde{\vec{p}}\,' - \tilde{\vec{p}})^2.$$

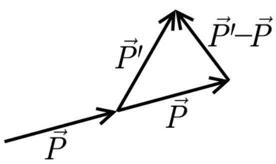

Рис. 4.17

Если построить векторную диаграмму 4.17, увидим, что $\tilde{\vec{p}}\,' - \tilde{\vec{p}}$ есть изменение импульса, поэтому величина t и называется квадратом переданного импульса. Воспользовавшись теоремой косинусов, получим:

$$t = -2|\tilde{\vec{p}}\,'|^2(1 - \cos\theta_c) \tag{4.11}$$

Найдем импульс $\tilde{\vec{p}}\,'$ в системе центра инерции. Частица m_2 сначала покоилась, а затем начала двигаться. Поэтому ее импульс в системе центра инерции:

$$|\tilde{\vec{p}}\,'| = \frac{m_2 v_c}{\sqrt{1 - v_c^2}}.$$

С другой стороны

$$|\vec{p}_1| = \frac{M_{эф} v_c}{\sqrt{1 - v_c^2}},$$

поэтому

$$|\tilde{\vec{p}}\,'| = \frac{|\vec{p}_1| m_2}{M_{эф}}. \tag{4.12}$$

Получается, что согласно (4.10)–(4.12) второй частице будет передана кинетическая энергия

$$\varepsilon_2' - m_2 = \frac{2|\tilde{\vec{p}}\,'|^2(1 - \cos\theta_c)}{2m_2} = \frac{|\vec{p}_1|^2 m_2(1 - \cos\theta_c)}{M_{эф}^2} = \frac{(\varepsilon_1^2 - m_1^2) m_2 (1 - \cos\theta_c)}{M_{эф}^2}.$$

Таким образом, кинетическая энергия зависит от угла рассеяния. Кинетическая энергия будет достигать своего максимального значения, когда $\cos\theta_c = -1$, следовательно $\theta_c = \pi$ (первая частица после столкновения отлетит назад). В этом случае:

$$\frac{(\varepsilon_2' - m_2)_{max}}{\varepsilon_1 - m_1} = \frac{2(\varepsilon_1 + m_1) m_2}{m_1^2 + m_2^2 + 2\varepsilon_1 m_2}. \tag{4.13}$$

Следующую лекцию начнем с анализа формулы (4.13).