ЛЕКЦИЯ 5

СТОЛКНОВЕНИЯ. БЫСТРОТА. ПРЕЦЕССИЯ ТОМАСА

1. Столкновения частиц

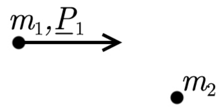

Рис. 5.1

На прошлой лекции мы рассмотрели задачу, в которой частица 1 с массой m_1 и известным 4-импульсом $\underline{P}_1$ налетает на неподвижную частицу массой m_2 (см. рис. 5.1). Для нахождения энергии второй частицы после столкновения пользовались инвариантами: эффективной массой $M_{эф}$ и квадратом переданного импульса t.

Получили, что

$$\varepsilon_2' - m_2 = \frac{|\vec{p}_1|^2(1-\cos\theta_c)m_2}{M_{эф}^2},$$

где θ_c — угол рассеяния в системе центра инерции (см. рис. 5.2),

$\varepsilon_2' - m_2$ — кинетическая энерги в лабораторной системе координат.

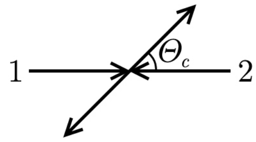

Рис. 5.2

Поскольку $|\vec{p}_1|^2 = \varepsilon_1^2 - m_1^2$, можем записать:

$$k = \frac{\varepsilon_2' - m_2}{\varepsilon_1 - m_1} = \frac{(\varepsilon_1 + m_1)m_2(1-\cos\theta_c)}{m_1^2 + m_2^2 + 2\varepsilon_1 m_2}.$$

где k — отношение кинетической энергии отдачи к кинетической энергии налетающей частицы. Отдача будет максимальной, когда $\theta_c = \pi$:

$$k_{max} = \frac{2(\varepsilon_1 + m_1)m_2}{m_1^2 + m_2^2 + 2\varepsilon_1 m_2}. \tag{5.1}$$

В нерелятивистском случае энергия частицы примерно равна массе покоя $\varepsilon_1 \approx m_1$, $\varepsilon_2 \approx m_2$. Подставив эти значения в (5.1), получим:

$$k_{max} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}.$$

Если $m_1 = m_2$, $k_{max} = 1$. Если $m_1 \ll m_2$, то

$$k_{max} = \frac{4\frac{m_1}{m_2}}{(1 + \frac{m_1}{m_2})^2} \ll 1,$$

и аналогично, если $m_1 \gg m_2$, то $k_{max} \ll 1$. Приведем примеры эффектов, связанных с этим явлением.

Пример 10 В плазме передача энергии от ионов к электронам и от электронов к ионам мала: электроны гораздо «охотнее» взаимодействуют с электронами, а ионы — с ионами. Поэтому в плазме возможно установление квазиравновесия — температуры ионов и электронов могут отличаться. *

Пример 11 Трудность осуществления управляемой термоядерной реакции заключается в том, что в большинстве способов передачи энергии греются электроны, а не ядра. Для передачи энергии к ядрам пользуются турбулентностью, ионно-звуковыми колебаниями и т.д. Теоретически возможно, но очень дорого, осуществить термоядерную реакцию с помощью контролируемого тяжелоионного синтеза: мишень, на которой будет происходить синтез, облучается тяжелыми ядрами. *

Совершенно другое явление мы можем наблюдать в релятивистском случае. В этом случае $\varepsilon_1 \gg m_1$, $\varepsilon_1 \gg m_2$. Тогда, согласно формуле (5.1) получим:

$$k_{max} = \frac{2\varepsilon_1 m_2}{2\varepsilon_1 m_2} = 1.$$

В релятивистском случае частицы, независимо от соотношения их масс, могут передавать энергию порядка своей кинетической энергии. Приведем примеры, когда это

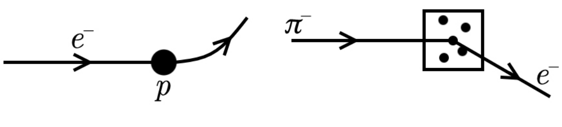

Рис. 5.3

используется.

Пример 12 Внутреннее строение стабильных частиц, например, протонов, изучалось так: на протонах рассеивались электроны (см. рис. 5.3). Если электрон «проходит» внутри протона, на него действует не весь заряд, а лишь его часть. Таким образом, по рассеянию электронов на разные углы можно было определить распределение зарядов.

Существуют различные нестабильные частицы, например, Σ^--мезон, время жизни которого составляет 10^{-10} секунды, или π^--мезон, живущий около 10^{-8} секунды. Из таких частиц не получится изготовить мишень. Как же определить их внутреннее строение?

На Серпуховском ускорителе был проведен следующий опыт: π^--мезон с очень большой энергией влетает в вещество, происходит рассеяние на электронах, в результате чего электрон получает энергию порядка энергии π^--мезона (см. рис. 5.3). Надо понимать, что в другой системе координат все может быть наоборот — электрон сталкивается с покоящимся π^--мезоном. По рассеянию электронов удалось определить зарядовый радиус π^--мезона. *

Пусть снова частица 1 налетает на неподвижную частицу 2(см. рис. 5.1, 5.2). В системе центра инерции

$$\varepsilon_c = M_{эф}, \qquad \vec{P}_c = 0.$$

Перейдем в систему координат, которая движется со скоростью $\vec{v}_c$. В ней энергия

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_c + \vec{v}_c \vec{P}_c}{\sqrt{1-v_c^2}} = \frac{\varepsilon_c}{\sqrt{1-v_c^2}} = \frac{M_{эф}}{\sqrt{1-v_c^2}}, \tag{5.2}$$

а импульс равен

$$\vec{P} = \frac{\vec{P}_c + \vec{v}_c \varepsilon_c}{\sqrt{1-v_c^2}} = \frac{\vec{v}_c \varepsilon_c}{\sqrt{1-v_c^2}} = \frac{M_{эф}\vec{v}_c}{\sqrt{1-v_c^2}}, \tag{5.3}$$

Получается, что система центра инерции движется как точечная частица со скоростью, равной скорости центра инерции. То есть всю систему центра инерции в лабораторной системе координат можно рассматривать как частицу. Импульс этой частицы такой же, какой был бы у частицы с массой $M_{эф}$.

Найдем импульс частицы в системе центра инерции. Покоившаяся в лабораторной системе координат вторая частица в системе центра инерции полетит навстречу первой, ее импульс

$$\vec{p}_c = \frac{m_2 \vec{v}_c}{\sqrt{1-v_c^2}}.$$

Из соотношения (5.3) видно, что

$$\frac{\vec{v}_c}{\sqrt{1-v_c^2}} = \frac{\vec{P}}{M_{эф}} \quad \Rightarrow \quad p_c = \frac{P_1 m_2}{M_{эф}}.$$

Энергия второй частицы в системе центра инерции, в соответствии с (5.2), равна

$$\varepsilon_{c(2)} = \frac{m_2}{\sqrt{1-v_c^2}} = \frac{m_2 \varepsilon}{M_{эф}} = \frac{m_2(\varepsilon_1 + m_2)}{M_{эф}}.$$

Чтобы **выразить угол**, под которым полетела частица в лабораторной системе координат **через угол рассеяния** в системе центра инерции θ_c, нужно перейти обратно от системы центра инерции к лабораторной системе координат. Проделав все вычисления, получим:

$$\operatorname{tg}\theta_2 = \sqrt{1-v_c^2} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\theta_c}{2},$$

где θ_2 — угол отклонения второй частицы от направления первой.

Видно, что при $\theta_c \to 0$ (угол рассеяния мал) котангенс стремится к бесконечности, следовательно $\theta_2 \to \frac{\pi}{2}$.

Таким образом, зная угол, под которым полетела рассеянная частица в лабораторной системе координат, можем найти угол рассеяния в системе центра инерции.

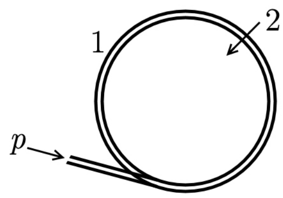

Рис. 5.4

Пример 13 На Серпуховском ускорителе изучалось рассеяние протона на протоне на очень малые углы в системе центра инерции (см. рис. 5.4).

Для этого поперек вакуумной камеры (1) пускалась сверхзвуковая водородная струя (2). Казалось бы, это должно испортить вакуум в камере. Однако, из курса молекулярной физики мы знаем, что сверхзвуковая струя, проходя через камеру с малым давлением, улучшает вакуум: она захватывает молекулы остаточного газа и уносит их из камеры ускорителя.

На ускорителе изучались частицы отдачи, которые вылетали почти под углом 90°. Так как процесс ускорения длился порядка $\tau = 2$ сек. для каждого цикла, за это время можно было измерить рассеяние на разных энергиях: от минимальной 1 ГэВ до 70 ГэВ.

В результате этого опыта было получено, что с ростом энергии радиус взаимодействия протона с протоном увеличивается, а также был найден закон, по которому это увеличение происходит. *

2. Преобразование трехмерных скоростей в СТО

Четырехмерная скорость — 4-вектор, и ее преобразования при переходе к другой системе координат нам известны — это преобразования Лоренца. Найдем, как преобразуется трехмерный вектор скорости.

Пусть есть две частицы со скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ (см. рис. 5.5). Найдем скорость второй частицы в системе, где первая покоится. В нерелятивистском случае эта скорость находится как разность двух векторов:

$$\vec{v}_{21} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1.$$

Составим 4-скорости первой и второй частицы в лабораторной системе координат:

$$\underline{U}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{1-v_1^2}}, \frac{\vec{v}_1}{\sqrt{1-v_1^2}}\right),$$
$$\underline{U}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1-v_2^2}}, \frac{\vec{v}_2}{\sqrt{1-v_2^2}}\right).$$

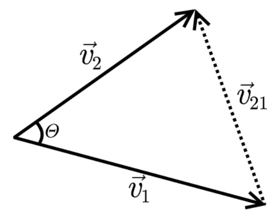

Рис. 5.5

В системе координат, где первая частица покоится:

$$\underline{U}'_1 = (1, 0), \qquad \underline{U}'_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v_{21}^2}}, \frac{\vec{v}_{21}}{\sqrt{1 - v_{21}^2}} \right).$$

Скалярное произведение 4-скоростей инвариантно относительно преобразования координат $(\underline{U}_1, \underline{U}_2) = (\underline{U}'_1, \underline{U}'_2)$, поэтому:

$$(\underline{U}'_1, \underline{U}'_2) = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{21}^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v_1^2}\sqrt{1 - v_2^2}}(1 - \vec{v}_1\vec{v}_2) = (\underline{U}_1, \underline{U}_2). \tag{5.4}$$

Решив это уравнение, получим преобразование трехмерной скорости в системе единиц, где $c = 1$:

$$|\vec{v}_{21}| = \frac{\sqrt{(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)^2 - v_1^2 v_2^2 \sin^2\theta}}{1 - \vec{v}_1\vec{v}_2}.$$

В системе единиц, где $c \neq 1$, воспользовавшись правилом размерностей, получим:

$$|\vec{v}_{21}| = \frac{\sqrt{(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)^2 - \frac{v_1^2 v_2^2}{c^2} \sin^2\theta}}{1 - \frac{\vec{v}_1\vec{v}_2}{c^2}}.$$

При скоростях, малых по сравнению со скоростью света, это уравнение переходит в классическое нерелятивистское соотношение

$$|\vec{v}_{21}| = |\vec{v}_2 - \vec{v}_1|.$$

3. Быстрота

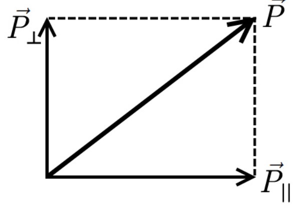

Рис. 5.6

Во второй лекции для того, чтобы показать, что преобразования Лоренца — повороты на мнимый угол в пространстве Минковского, было введено понятие **быстроты**:

$$\frac{v}{c} = \operatorname{th}\alpha,$$

а при использовании системы единиц, где $c = 1$, получается $v = \operatorname{th}\alpha$.

Пусть есть частица с импульсом $\vec{P} = \vec{P}_\parallel + \vec{P}_\perp$ (см. рис. 5.6). Ее энергия

$$\varepsilon^2 = m^2 + \vec{P}_\parallel^2 + \vec{P}_\perp^2. \tag{5.5}$$

Введем обозначения:

$$m^2 + \vec{P}_\parallel^2 = m_\perp^2, \qquad v_\parallel = \frac{P_\parallel}{\varepsilon} = \operatorname{th}\alpha,$$

тогда, поделив выражение (5.5) на ε^2, получим:

$$1 = \frac{m_\perp^2}{\varepsilon^2} + v_\parallel^2.$$

С учетом того, что $1 - \operatorname{th}^2\alpha = \frac{1}{\operatorname{ch}^2\alpha}$, получим:

$$1 - v_\parallel^2 = \frac{1}{\operatorname{ch}^2\alpha} = \frac{m_\perp^2}{\varepsilon^2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \varepsilon = m_\perp \operatorname{ch}\alpha \\ P_\parallel = \varepsilon \cdot v_\parallel = m_\perp \operatorname{sh}\alpha \end{cases} \tag{5.6}$$

Пусть в некой системе координат K', движущейся вдоль оси X со скоростью $v_0 = v_{\parallel 0}^0 = \operatorname{th}\alpha_0$, частица имеет импульс $\vec{P}' = \vec{P}_\parallel' + \vec{P}_\perp'$ (см. рис. 5.7) Найдем энергию в системе K. Согласно (5.2):

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon' + v_\parallel^0 P_\parallel'}{\sqrt{1 - v_\parallel^2}} = \frac{m_\perp \operatorname{ch}\alpha + \operatorname{th}\alpha_0 m_\perp \operatorname{sh}\alpha}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2\alpha_0}} = \operatorname{ch}\alpha_0 (m_\perp \operatorname{ch}\alpha + m_\perp \operatorname{sh}\alpha \operatorname{th}\alpha_0) =$$

$$= m_\perp \operatorname{ch}\alpha_0 \operatorname{ch}\alpha + m_\perp \operatorname{sh}\alpha_0 \operatorname{sh}\alpha = m_\perp \operatorname{ch}(\alpha + \alpha_0).$$

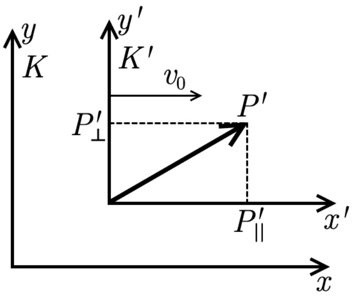

Рис. 5.7

Таким образом, при переходе к новой системе координат просто происходит **сложение быстрот**. Если проделать все то же самое для импульса, получим:

$$P_\parallel = m_\perp \operatorname{sh}(\alpha + \alpha_0).$$

Итак, с помощью такой параметризации скорости мы смогли, во-первых, представить преобразования Лоренца как повороты на мнимый угол в пространстве Минковского, и во-вторых — представить преобразования энергии и импульса как сложение быстрот.

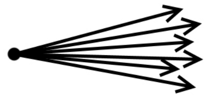

Рис. 5.8

Пусть есть пучок частиц с разбросами $\Delta p_y \Delta p_z \Delta p_x$ (см. рис. 5.8). Рассмотрим его в другой системе координат, движущейся относительно первой системы координат со скоростью v_0 вдоль оси X. Поперечные разбросы не меняются:

$$\Delta p'_y = \Delta p_y, \qquad \Delta p'_z = \Delta p_z.$$

Вычислим разброс вдоль оси X. Согласно (5.6):

$$p_x = m_\perp \operatorname{sh} \alpha \quad \Rightarrow \quad \Delta p_x = m_\perp \operatorname{ch} \alpha \cdot \Delta \alpha,$$

где $m_\perp \operatorname{ch} \alpha = \varepsilon$, поэтому

$$\frac{\Delta p_x}{\varepsilon} = \Delta \alpha, \tag{5.7}$$

где $\Delta \alpha$ — быстрота p_x.

В системе покоя

$$p'_x = m_\perp \operatorname{sh} (\alpha + \alpha_0).$$

Быстрота α_0 связана со скоростью движения системы относительно лабораторной соотношением $v_0 = \operatorname{th} \alpha_0$. Поэтому α_0 — точно определенная величина, не обладающая разбросом. Таким образом,

$$\Delta p'_x = m_\perp \operatorname{ch} (\alpha + \alpha_0) \cdot \Delta \alpha = \varepsilon' \cdot \Delta \alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta p'_x}{\varepsilon'} = \Delta \alpha. \tag{5.8}$$

Из выражений (5.7), (5.8) видно, что $\frac{\Delta p_x}{\varepsilon}$ — релятивистский инвариант, а следовательно

$$\frac{d^3 p}{\varepsilon} \text{ — } \textbf{релятивистский инвариант}.$$

4. Пространство трехмерных скоростей. Прецессия Томаса

Попробуем понять, что из себя пр ование (5.4) в терминах быстроты.

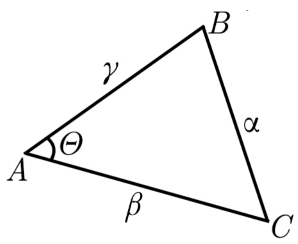

Рис. 5.9

Возьмем треугольник скоростей ABC как на рис. 5.5 (см. рис. 5.9). Тогда сторона AC соответствует скорости $\vec{v}_1$, сторона AB — скорости $\vec{v}_2$, а сторона BC в этом случае будет соответствовать относительной скорости:

$$AC \to \vec{v}_1, \qquad AB \to \vec{v}_2, \qquad BC \to \vec{v}_{21}.$$

Скорости $\vec{v}_{21}$ тогда будет соответствовать быстрота α, скорости $\vec{v}_1$ — быстрота β, скорости $\vec{v}_2$ — быстрота γ.

Во второй лекции мы показывали связь тригонометрических функций с чисто мнимыми аргументами и гиперболических функций. В результате, заменив $\operatorname{th}\alpha = v$ (при этом $c = 1$), получалось, что:

$$\frac{1}{\sqrt{1-v_0^2}} = \operatorname{ch}\alpha_0, \qquad \frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}} = \operatorname{sh}\alpha_0,$$

где α_0 — быстрота, соответствующая скорости v_0.

С учетом этого выражение(5.4) примет вид:

$$\operatorname{ch}\alpha = \operatorname{ch}\beta\operatorname{ch}\gamma - \operatorname{sh}\beta\operatorname{sh}\gamma\cos A. \tag{5.9}$$

Рассмотрим сферический треугольник ABC на сфере единичного радиуса (см. рис. 5.10). Дуге AB соответствует угол α, дуге AC — угол β. Найдем **длину стороны сферического треугольника** — дуги BC:

$$\smile AB \to \alpha, \qquad \smile AC \to \beta.$$

Найдем координаты векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$:

$$\vec{n}_1 = (\sin\theta_1\cos\phi_1,\, \sin\theta_1\sin\phi_1,\, cos\theta_1),$$
$$\vec{n}_2 = (\sin\theta_2\cos\phi_2,\, \sin\theta_2\sin\phi_2,\, cos\theta_2).$$

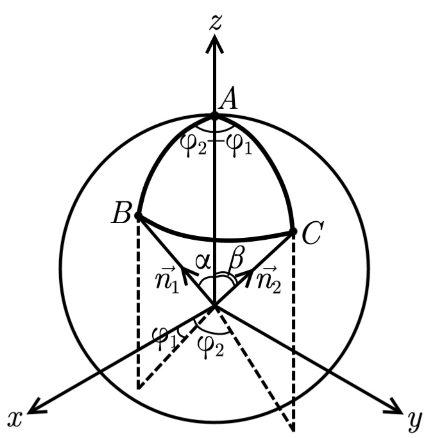

Рис. 5.10

Тогда $\cos\gamma \to\smile BC$ равен:

$$\cos\gamma = \vec{n}_1\vec{n}_2 = \cos\theta_1\cos\theta_2 + \\ + \sin\theta_1\sin\theta_2(\cos\phi_1\cos\phi_2 + \sin\phi_1\sin\phi_2),$$

и, воспользовавшись формулой косинуса разности, окончательно получим:

$$\cos\gamma = \cos\theta_1\cos\theta_2 + \\ + \sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\phi_2 - \phi_1). \tag{5.10}$$

Формулы (5.9) и (5.10) очень похожи: выражение (5.9) соответствует выражению (5.10), в котором все углы заменены на чисто мнимые величины. Напомним, что в этом случае

$$\cos i\phi = \operatorname{ch}\phi, \qquad \sin i\phi = i\operatorname{sh}\phi,$$

именно поэтому в выражении (5.9) присутствует разность вместо суммы.

Получается, что если определение стороны сферического треугольника происходит на сфере с положительным радиусом, то метрике в (5.9) соответствует **пространство с постоянным отрицательным радиусом кривизны**. Поверхность с постоянной отрицательной кривизной в евклидовом пространстве изобразить нельзя, изучать ее можно только мысленно.

Пространство с постоянной отрицательной кривизной называется пространством Лобачевского. Удивительная история — Лобачевский первый увидел, что пространства с постоянной отрицательной кривизной возможны. На родине его ценили как ректора Казанского университета, но его работа по геометрии принята не была — ему не поверили. Но гения мог понять только гений, и Гаусс понял Лобачевского и настоял, чтобы Лобачевского избрали в Прусскую академию наук.

Оказывается, что пространство Лобачевского, придуманное как попытка обойтись без пятого постулата Евклида, есть в точности пространство трехмерных скоростей.

Рассмотрим **метод решения треугольников в пространстве Лобачевского**. В пространстве с положительной кривизной у сферического треугольника сумма углов больше π. В пространстве с отрицательной кривизной наоборот — сумма углов всегда меньше π.

Запишем соотношения, необходимые для решения треугольника в пространстве Лобачевского (треугольника скоростей):

$$\begin{cases} \dfrac{\sin A}{\operatorname{sh}\alpha} = \dfrac{\sin B}{\operatorname{sh}\beta} = \dfrac{\sin C}{\operatorname{sh}\gamma}, \\ \angle A + \angle B + \angle C = \pi - \delta, \quad \text{где } \delta = S_{ABC}, \\ \cos C = -\cos(A+B) = -\cos A\cos B + \sin A \sin B \operatorname{ch}\gamma, \\ \operatorname{ch}\alpha = \operatorname{ch}\beta\operatorname{ch}\gamma - \operatorname{sh}\beta\operatorname{sh}\gamma\cos A \end{cases}$$

Все эти соотношения записаны для случая, когда скорость $c = 1$. В пространстве Лобачевского нет подобных треугольников: по трем углам всегда можно определить треугольник, поскольку $S_{ABC} = \delta$.

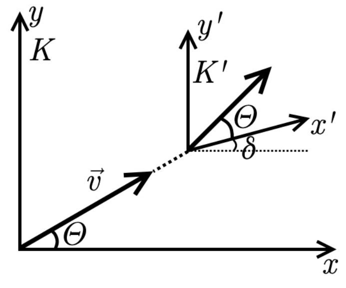

Рис. 5.11

Пусть частица движется в системе координат K есть скорость $\vec{v}$, направленная под углом θ к оси X (см. рис. 5.11):

$$\begin{cases} v_x = v\cos\theta, \\ v_y = x\sin\theta. \end{cases} \tag{5.11}$$

Пусть система K' движется относительно K со скоростью $\vec{v}$. Оси в системе K' выберем так, чтобы они были параллельны осям системы K. Под параллельностью в данном случае понимается, что угол между направлением скорости $\vec{v}$ и осью X' должен быть в точности равен θ.

Допустим, что мы хотим перейти в систему K' следующим образом: сначала двигаясь вдоль оси X, а затем — вдоль оси Y. В пространстве Лобачевского, если у треугольника стороны — не отрезки, может получиться, что угол, который получится в результате переноса, не совпадет с направ ... 12).

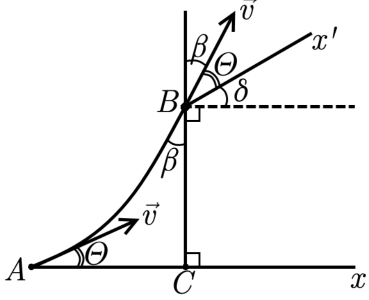

Рис. 5.12

Оказывается, что если постоянный вектор переносить таким образом, то он отстанет на некоторый угол от оси X', а с течением времени будет происходить поворот этого угла.

Поворот этого угла со временем и называется **прецессией Томаса**. Рассчитаем величину прецессии Томаса.

Пусть во время движения частицы перпендикулярно ее движению некоторое время действовало ускорение. Тогда возникнет составляющая скорости, перпендикулярная скорости $\vec{v}$.

Найдем угол B.

$$\cos B = \cos(A - C) = -\cos A\cos C + \sin A\sin C\,\mathrm{ch}\,\beta = -\sin\theta\,\mathrm{ch}\,\beta,$$

где β — быстрота, соответствующая величине v_x ($v_x = \mathrm{th}\,\beta$). Воспользовавшись формулой (5.11), получим:

$$\cos B = \frac{v_y}{v}\frac{1}{\sqrt{1-v_x^2}}. \tag{5.12}$$

Искомый угол прецессии Томаса $\delta = \frac{\pi}{2} - \theta - B$, поэтому:

$$\sin\delta = \cos(\theta + B) = \cos\theta\cos B - \sin\theta\sin B. \tag{5.13}$$

Для нахождения δ осталось определить $\sin B$. Воспользовавшись основным тригонометрическим тождеством, получим:

$$\sin^2 B = 1 - \cos^2 B = 1 - \frac{v_y^2}{v^2}\frac{1}{1-v_x^2} = \frac{(1-v_x^2)v^2 - v_y^2}{(1-v_x^2)v^2} = \frac{v^2 - v^2v_x^2 - v_y^2}{(1-v_x^2)v^2},$$

и, поскольку $v^2 - v_y^2 = v_x^2$, получим

$$\sin^2 B = \frac{v_x^2(1-v^2)}{v^2(1-v_x^2)} = \frac{v_x^2}{v^2}\frac{1-v^2}{1-v_x^2}.$$

Окончательно получим:

$$\sin B = \frac{v_x}{v}\frac{\sqrt{1-v^2}}{\sqrt{1-v_x^2}}. \tag{5.14}$$

Введем понятие гамма-факторов:

$$\gamma_x = \frac{1}{\sqrt{1-v_x^2}}, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Подставляя выражения (5.12) и (5.14) в (5.13) и учитывая выражения для гамма-факторов, получим

$$\sin\delta = \frac{v_x}{v}\frac{v_y}{v}\gamma_x - \frac{v_x}{v}\frac{v_y}{v}\frac{\gamma_x}{\gamma} = \frac{v_x v_y}{v^2}\gamma_x\left(1-\frac{1}{\gamma}\right). \tag{5.15}$$

Легко вычислить, что:

$$\frac{1-\frac{1}{\gamma}}{v^2} = \frac{1-\sqrt{1-v^2}}{v^2}.$$

Домножив числитель и знаменатель этого равенства на $1+\sqrt{1-v^2}$ и раскрыв в числителе получившуюся разность квадратов, получим:

$$\frac{1-\frac{1}{\gamma}}{v^2} = \frac{1-(1-v^2)}{v^2(1+\sqrt{1-v^2})} = \frac{v^2}{v^2(1+\sqrt{1-v^2})} = \frac{1}{1+\sqrt{1-v^2}}.$$

Подставив теперь в это выражение $\sqrt{1-v^2} = 1/\gamma$, получим:

$$\frac{1-\frac{1}{\gamma}}{v^2} = \frac{1}{1+\frac{1}{\gamma}} = \frac{1}{\frac{\gamma+1}{\gamma}} = \frac{\gamma}{\gamma+1} \tag{5.16}$$

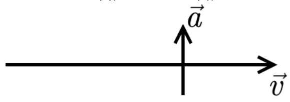

Рис. 5.13

Пусть частица движется вдоль прямой и во время движения действует ускорение a за бесконечно малое время dt (см. рис. 5.13) Тогда $v_y = a\,dt$ — бесконечно малая величина. В этом случае $\sin\delta \approx \delta$, поэтому выражение (5.15) примет вид:

$$d\delta = \frac{va\,dt}{v^2}\gamma_x(1-\frac{1}{\gamma}) = \frac{va\,dt}{v^2}\gamma_x\frac{\gamma-1}{\gamma}.$$

Поскольку изменение скорости очень маленькое, то $\gamma_x \approx \gamma$, а из уравнения (5.16) следует, что

$$\frac{\gamma-1}{v^2} = \frac{\gamma^2}{\gamma+1},$$

следовательно, для бесконечно малого времени **угловая скорость прецессии Томаса** $\vec{\Omega}$ примет вид:

$$\frac{d\delta}{dt} = \vec{\Omega} = \frac{\gamma^2}{\gamma + 1}[\vec{a}, \vec{v}] \tag{5.17}$$

Этот эффект имеет важную роль при рассмотрении атомных процессов. Он сыграл большую роль в атомной физике, в открытии спина частиц: спин начинает вращается если есть ускорение, перпендикулярное движению.