ЛЕКЦИЯ 7

ТЕНЗОР ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

На прошлой лекции было установлено, что если ввести **вектор-потенциал** $\vec{A}$ и **скалярный потенциал** ϕ, то автоматически будут удовлетворяться два уравнения Максвелла.

Выпишем некоторые соотношения, полученные в прошлой лекции, которыми будем пользоваться:

$$\vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A}, \qquad \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}. \tag{7.1}$$

Вектор-потенциал и скалярный потенциал определены неоднозначно. Всегда можно заменить

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}f, \qquad \phi' = \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}. \tag{7.2}$$

Подставив (7.1) во вторую пару уравнений Максвелла (первое и второе уравнение (6.2)), получим

$$\begin{cases} -\,\Box\vec{A} = \dfrac{4\pi}{c}\vec{j} - \vec{\nabla}\left(\operatorname{div}\vec{A} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\phi}{\partial t}\right), \\ -\,\Box\phi = 4\pi\rho + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\operatorname{div}\vec{A} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\phi}{\partial t}\right). \end{cases} \tag{7.3}$$

Эти выражения значительно упростились бы, если бы выражение в скобке оказалось равным нулю. В силу того, что векторный и скалярный потенциалы определены неоднозначно, всегда можем сделать так, чтобы выражение в скобке оказалось равным нулю. Действительно, пусть для некоторых $\vec{A}'$ и ϕ' (см. (7.2))

$$\operatorname{div}\vec{A}' + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi'}{\partial t} = \chi(\vec{r},t) = \operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{\nabla}f - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

$\operatorname{div}\vec{\nabla}f = \Delta f$, поэтому, воспользовавшись оператором Д'Аламбера, получим:

$$\chi(\vec{r},t) = \operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \Box f.$$

Следовательно, если взять функцию χ такую, что $\Box f = \chi$, то

$$\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0,$$

и, следовательно, уравнения (7.3) примут вид:

$$\begin{cases} \Box \phi = -4\pi\rho, \\ \Box \vec{A} = -\dfrac{4\pi}{c}\vec{j}. \end{cases} \tag{7.4}$$

Стоит заметить, что после такого упрощения векторный и скалярный потенциалы не будут определены однозначно: если прибавить к этим потенциалам функцию f_0 такую, что

$$\Box f_0 = 0,$$

то с точностью до производной функции $\vec{A}'$ и $\vec{\phi}'$ будут неоднозначны.

В литературе, особенно в иностранной литературе, может встретиться случай, когда в записи уравнений Максвелла отсутствует 4π. В этом случае множитель 4π отсутствовал бы и в уравнениях (7.4).

Если такое происходит, надо понимать, что уравнения записаны в **хевисайдовых единицах**. Размерность силы мы определили из соотношения:

$$[F] = \frac{[e^2]}{[r^2]}.$$

Если бы мы определяли силу из другого соотношения, то

$$[F] = \frac{[e_x^2]}{[4\pi r^2]} \quad \Rightarrow \quad e^2 = \frac{e_x^2}{4\pi},$$

где e_x — хевисайдовский заряд.

Тогда в законе Био и Савара появился бы множитель, пропорциональный $\frac{1}{4\pi}$, и, следовательно, в уравнениях Максвелла 4π исчезло бы.

Покажем, что плотность заряда и плотность тока вместе составляют 4-вектор:

$$(\rho c, \vec{j}) = \underline{j}^i, \tag{7.5}$$

а даламбертиан — релятивистский скаляр.

Тогда, если мы потребуем, чтобы ϕ и $\vec{A}$ составляли 4-вектор, то увидим, что система уравнений (7.4) будет удовлетворять специальной теории относительности:

$$\underline{A}^i = (\phi, \vec{A}) \quad \Rightarrow \quad \Box \underline{A}^i = \frac{4\pi}{c}\underline{j}^i.$$

Докажем вначале, что при линейных преобразованиях Лоренца оператор $\frac{\partial}{\partial x^i}$ ведет себя как ковариантный 4-вектор.

Ранее в теореме 2 было показано, что если четыре величины Y_i, природа которых неизвестна, будучи умноженными на контравариантный 4-вектор, дают скаляр, то Y_i — ковариантный вектор.

Возьмем $\frac{\partial}{\partial x^i}$ от произвольного контравариантного вектора:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}A^i = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial x^i}{\partial x'^k}A'^k(x')\right).$$

Поскольку преобразование линейное, то дифференциал от производной в скобках тождественно равен нулю, поэтому

$$\frac{\partial}{\partial x^i}A^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k}\frac{\partial A'^k}{\partial x'^m}\frac{\partial x'^m}{\partial x^i},$$

и в силу того, что m и k — независимые переменные

$$\frac{\partial x^i}{\partial x'^k}\frac{\partial x'^m}{\partial x^i} = \frac{\partial x'^m}{\partial x'^k} = \delta^m{}_k.$$

При $m = k$:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}A^i = \frac{\partial A'^k}{\partial x'^m}\delta^m{}_k = \frac{\partial A'^k}{\partial x'^k} = \text{const},$$

следовательно, оператор $\frac{\partial}{\partial x^i}$ — ковариантный вектор.

Этот ковариантный вектор должен иметь следующий вид:

$$\underline{\frac{\partial}{\partial x^i}} = \left(\frac{\partial}{c\,\partial t}, \vec{\nabla}\right). \tag{7.6}$$

Аналогично можно доказать, что при дифференцировании по ковариантному x_i контравариантный вектор

$$\underline{\frac{\partial}{\partial x_i}} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}\right). \tag{7.7}$$

Скалярное произведение (7.6) и (7.7) оказывается равным

$$\underline{\frac{\partial}{\partial x^i}}\,\underline{\frac{\partial}{\partial x_i}} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - (\vec{\nabla})^2 = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = -\Box,$$

следовательно, оператор Д'Аламбера — скалярный оператор.

Докажем теперь, что $\underline{j}^i$ — 4-вектор. Возьмем бесконечно малый заряд δe, и умножим его на dx^i. Важно, что заряд считается релятивистским скаляром, поэтому

$$\delta e\, dx^i \text{ — 4-вектор} \tag{7.8}$$

С другой стороны:

$$\delta e = \rho\, d^3x,$$

где ρ — плотность заряда,

$d^3x = dx\, dy\, dz$.

Следовательно, выражение (7.8) примет вид:

$$\delta e\, dx^i = \rho\, d^3x \cdot dx^i = \rho\, d^3x \cdot \frac{dx^i}{dt}dt, \tag{7.9}$$

где $d^3x\,dt = d^4x = dx\,dy\,dz\,dt = d\Omega$ — некий четырехмерный элемент объема.

Докажем, что этот четырехмерный элемент объема $d\Omega$ — релятивистский инвариант. Для этого выразим этот объем в другой системе координат. Из курса линейной алгебры мы знаем, что преобразование обычного объема происходит с помощью определителя (якобиана). То же самое выполняется и для четырехмерного объема:

$$d^4x = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^0}{\partial x'^0} & \frac{\partial x^0}{\partial x'^1} & \frac{\partial x^0}{\partial x'^2} & \frac{\partial x^0}{\partial x'^3} \\ \frac{\partial x^1}{\partial x'^0} & \frac{\partial x^1}{\partial x'^1} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial x'^3} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial x^3}{\partial x'^0} & & \ldots\,. & \frac{\partial x^3}{\partial x'^3} \end{vmatrix} d^4x' = J\,d^4x'. \tag{7.10}$$

Таким образом, чтобы показать, что объем – релятивистский инвариант, нужно показать, что $J = 1$.

Докажем это для общего случая. Запишем преобразования метрического тензора:

$$g'_{ik} = \frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial x^m}{\partial x'^k} g_{lm}. \tag{7.11}$$

Производные в этом выражении — суть элементы детерминанта. Введем обозначения:

$$\frac{\partial x^l}{\partial x'^i} = a_{il},$$
$$\frac{\partial x^m}{\partial x'^k} = a_{km} = \tilde{a_{mk}}.$$

В этом выражении тильда обозначает операцию транспонирования. Тогда сумму произведений (7.11) можно записать в виде произведения трех матриц, элементы которых являются элементами детерминанта:

$$g'_{ik} = a_{il} g_{lm} \tilde{a_{mk}}.$$

Известно, что детерминант произведения матриц равен произведению их детерминантов. Обозначим:

$$\|g_{ik}\| = g, \qquad \|g'_{ik}\| = g'.$$

В галилеевой системе координат $g = -1$, поэтому, в силу того, что g — отрицательная величина, получим:

$$g' = g \cdot J^2 \quad \Rightarrow \quad J^2 = \frac{g'}{g} \quad \Rightarrow \quad J = \frac{\sqrt{-g'}}{\sqrt{-g}}.$$

Окончательно, выражение (7.10) примет вид:

$$d^4x = \frac{\sqrt{-g'}}{\sqrt{-g}} d^4x' \quad \Rightarrow \quad \sqrt{-g}\,d^4x = \sqrt{-g'}\,d^4x'.$$

Следовательно, величина $\sqrt{-g}d^4x$ — **релятивистский инвариант**. В теории гравитации, общей теории относительности в качестве инвариантного объема используется именно это выражение, однако в нашем случае $g = -1$, поэтому для преобразований

Лоренца получим:

$$d^4x = d^4x',$$

то есть четырехмерный объем инвариантен относительно преобразований координат.

Итак, в выражении (7.9) δe — скаляр, dx^i — контравариантный 4-вектор, следовательно, левая часть равенства (7.9) — 4 вектор, а значит и правая часть этого равенства также должна быть 4-вектором.

В правой части (7.9) $d^3x\,dt = d^4x$ — инвариант (скаляр), следовательно:

$$\rho\frac{dx^i}{dt} = \underline{j}^i \text{ — 4-вектор.}$$

Записав этот 4-вектор и учитывая, что $\rho\vec{v}$ — ток, получим

$$\underline{j}^i = (\rho c, \rho\vec{v}) = (\rho c, \vec{j}),$$

то есть в точности выражение (7.5).

Теперь видно, что стоит нам потребовать, чтобы вектор-потенциал и скалярный потенциал вместе составляли 4-вектор, как уравнения для векторного и скалярного потенциала (7.4) становятся релятивистски инвариантны.

Можем сразу показать, что многие другие выражения в этом случае также релятивистски инварианты. Например, **закон сохранения заряда**

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0$$

есть не что иное, как

$$\frac{\partial j^i}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i}j^i = 0,$$

где $\frac{\partial}{\partial x^i}$ — ковариантный вектор,
j^i — контравариантный вектор.

Следовательно, закон сохранения заряда принимает релятивистски инвариантный вид (так как если вектор (скаляр, тензор) равен нулю в одной системе координат, то он равен нулю в любой другой системе координат).

Условие Лоренца примет вид:

$$\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} = \left(\frac{\partial\phi}{c\,\partial t}, \operatorname{div}\vec{A}\right) = 0.$$

Градиентные (калибровочные) преобразования (7.2) также приобретают смысл. Учитывая, что ковариантный вектор $A_i = (\phi, -\vec{A})$, получим, что градиентные преобразования примут вид:

$$A'_i = A_i - \frac{\partial}{\partial x^i}f. \tag{7.12}$$

Действительно, для нулевой компоненты в этом случае получим:

$$\phi' = \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t},$$

а для пространственных компонент с $i = 1, 2, 3$:

$$-\vec{A}' = -\vec{A} - \vec{\nabla} f.$$

Итак, приняв, что $(\phi, \vec{A})$ — 4-вектор, удалось, во-первых, получить релятивистки-инвариантные уравнения, а во-вторых увидеть, что использованные ранее соотношения — релятивистские инварианты.

Это уже вторая предпосылка к тому, что теория Максвелла релятивистски инвариантна. Первой предпосылкой был доказанный на прошлой лекции факт, что теория Максвелла PT-симметрична.

Недостаток векторного и скалярного потенциала заключается в том, что они определены с точностью до градиента некоторой функции f_0, даламбертиан которой равен нулю. Физические величины не могут быть определены с точностью до какого-либо произвольного значения. Однако мы можем из $\vec{A}$ и ϕ составить такую величину, которая не будет содержать произвольного значения.

Составим тензор, называемый **тензором электромагнитного поля**:

$$\mathfrak{F}_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}. \tag{7.13}$$

Каждый из членов этой разности — ковариантный тензор второго ранга, поскольку в каждом из членов разности к ковариантному вектору применен оператор, который, как было доказано ранее, является ковариантным вектором.

Следовательно, и разность этих величин $\mathfrak{F}_{ik}$ также является ковариантным тензором второго ранга. Докажем, что эта величина составлена так, что произвольность исключена. Записав $\mathfrak{F}'_{ik}$ с учетом (7.12), получим:

$$\mathfrak{F}'_{ik} = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(A_k - \frac{\partial f}{\partial x^k}\right) - \frac{\partial}{\partial x^k}\left(A_i - \frac{\partial f}{\partial x^i}\right) = \mathfrak{F}_{ik} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^i\,\partial x^k} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^k\,\partial x^i}.$$

Предполагаем, что производные непрерывны, поэтому

$$-\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\,\partial x^k} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^k\,\partial x^i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{F}'_{ik} = \mathfrak{F}_{ik}\,.$$

Таким образом, выбранный тензор электромагнитного поля (7.13) не содержит каких-либо неопределенностей.

На основании этого научились рассматривать другие теории, где источником полей являются сохраняющиеся величины — заряды. Если источником полей являются сохраняющиеся величины, назовем их условно «зарядами» (это может быть не только электрический заряд, но и слабый заряд, цветовой заряд), то эти заряды являются источником калибровочных полей, определенных с точностью до производных (или до поворотов в некотором пространстве).

Если из этих полей составить комбинации, не зависящие от произвола в выборе полей, то тогда получим физические величины. Для этих физических величин на основании теории относительности, квантовой механики можно составлять релятивистски инвариантные функции Лагранжа.

Рассмотрим подробнее, что это за величины. Тензор $\mathfrak{F}_{ik}$ — антисимметричный, так как, согласно (7.13):

$$\mathfrak{F}_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} = -\mathfrak{F}_{ki},$$

следовательно диагональные элементы этого тензора равны нулю. Найдем некоторые его компоненты:

$$\mathfrak{F}_{01} = \frac{\partial A_1}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^1}, \quad A_1 = -A_x, \quad A_0 = \phi, \quad x^0 = ct, \quad x^1 = x.$$

Учитывая соотношения (7.1) для $\mathfrak{F}_{01}$ получим:

$$\mathfrak{F}_{01} = -\frac{\partial A_x}{c\,\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x} = E_x.$$

Аналогично можно показать, что $\mathfrak{F}_{02} = E_y$, а $\mathfrak{F}_{03} = E_z$. Вычислим теперь $\mathfrak{F}_{12}$:

$$\mathfrak{F}_{12} = \frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2} = -\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{-\partial A_x}{\partial y} = \frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x}.$$

Напомним, что ротор вектора $\vec{A}$, по определению, это:

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) - \vec{j}\left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right).$$

Очевидно, что выражение для $\mathfrak{F}_{12}$ есть не что иное, как третья компонента ротора $\vec{A}$, взятая с обратным знаком:

$$\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} = -(\operatorname{rot} A)_3 \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{F}_{12} = -(\operatorname{rot} A)_3 = -H_z.$$

Аналогично можно доказать, что $\mathfrak{F}_{13} = H_y$, а $\mathfrak{F}_{23} = -H_x$, поэтому, воспользовавшись антисимметричностью тензора $\mathfrak{F}_{ik}$, получим:

$$\mathfrak{F}_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix} \tag{7.14}$$

Воспользовавшись (7.14), легко записать **контравариантный тензор второго ранга**: нулевой индекс поднимается без изменения знака, а индекс, содержащий пространственную компоненту, меняет знак:

$$\mathfrak{F}^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}$$

Найдем, чему равняется $\frac{\partial}{\partial x^k}\mathfrak{F}^{ik}$. В этом выражении на контравариантный тензор второго ранга действует оператор, который является ковариантным вектором, следовательно эта величина — контравариантный вектор.

Действительно, если $c_m A^{ki} = T^{ki}{}_m$. Если же теперь положить $m = i$ и просуммировать по повторяющемуся индексу, получим тензор на два ранга меньший — контравариантный 4-вектор.

Окончательно можем записать

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\mathfrak{F}^{ik} = -\frac{4\pi}{c}j^i. \tag{7.15}$$

Выражение (7.15) есть не что иное, как контравариантная запись **второй пары уравнений Максвелла**. Действительно, для нулевой компоненты:

$$-\operatorname{div}\vec{E} = -\frac{4\pi}{c}\rho c \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho.$$

Для, например, первой компоненты ($i = 1$):

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\mathfrak{F}^{1k} = \frac{\partial\mathfrak{F}^{10}}{\partial x^0} + \frac{\partial\mathfrak{F}^{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial\mathfrak{F}^{13}}{\partial x^3} = \frac{\partial E_x}{c\,\partial t} - \frac{\partial H_z}{\partial y} + \frac{\partial H_y}{\partial z}.$$

Согласно уже записанному ранее определению ротора некоторого вектора:

$$-\frac{\partial H_z}{\partial y} + \frac{\partial H_y}{\partial z} = (\operatorname{rot}\vec{H})_1,$$

поэтому выражение для первой компоненты примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\mathfrak{F}^{1k} = \frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} - (\operatorname{rot}\vec{H})_1 = -\frac{4\pi}{c}j^1.$$

Оставив в левой части этого равенства $(\operatorname{rot}\vec{H})_1$ и перенеся все остальное в правую часть, получим:

$$(\operatorname{rot}\vec{H})_x = \frac{4\pi}{c}j_x + \frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t}.$$

Для индексов 2 и 3, очевидно, получим аналогичные выражения для y и z компоненты $\operatorname{rot}\vec{H}$ соответственно. Тогда векторное равенство в точности совпадет со вторым уравнением второй пары уравнений Максвелла.

Таким образом, вторая пара уравнений Максвелла записана в явно релятивистской форме: в правой части (7.15) стоит контравариантный вектор, а в левой части — произведение ковариантного вектора и контравариантного тензора второго ранга, то есть тоже контравариантный 4-вектор.

Зная правила преобразования тензора при преобразованиях Лоренца, можем получить законы преобразования полей от одной системы координат к другой (поскольку компоненты тензора — компоненты полей).

Запишем релятивистски инвариантное движение заряженной частицы. Релятивистские уравнения, которые пришли на смену закону Ньютона, имеют вид:

$$\frac{d\underline{P}^i}{d\tau} = \underline{F}^i = \frac{e}{c}\mathfrak{F}^{ik}U_k, \tag{7.16}$$

где U_k — ковариантный вектор 4-скорости.

Напомним, что вектор 4-скорости имеет вид:

$$\underline{U}^k = \left(\frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) \quad \Rightarrow \quad \underline{U}_k = \left(\frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, -\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right),$$

а вектор 4-импульса равен:

$$\underline{P}^i = \left(\frac{\varepsilon}{c}, \vec{p}\right).$$

$\mathfrak{F}^{ik} U_k$ — контравариантный вектор, поскольку это выражение есть произведение контравариантного тензора второго ранга на ковариантный вектор. Следовательно, с этой точки зрения равенство (7.16) записано верно.

В соответствии с преобразованием времени

$$d\tau = dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

для нулевой компоненты можем записать:

$$\frac{d\left(\frac{\varepsilon}{c}\right)}{dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{e}{c}(-\vec{E})\left(-\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = e\vec{E}\vec{v}.$$

Для $i = 1$, например, выражение (7.16) примет вид

$$\frac{dp_x}{dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{e}{c}\mathfrak{F}^{1k} U_k = \frac{e}{c}\left(E_x \cdot \frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - H_z \cdot \frac{-v_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + H_y \cdot \frac{-v_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$$

Сократив в этом выражении на гамма-фактор и учитывая, что $H_z v_y - H_y v_z$ — i-ая компонента векторного произведения, получим

$$\frac{dp_x}{dt} = eE_x + \frac{e}{c}[\vec{v}, \vec{H}]_x,$$

то есть x-компоненту **силы Лоренца**.

Для того, чтобы записать первую пару уравнений Максвелла, нужно ввести еще один тензор. Рассмотрим четыре величины в системе K, определяющие **совершенно антисимметричный псевдотензор четвертого ранга**:

$$e^{iklm} = \begin{cases} 0, & \text{если какие-либо два индекса равны,} \\ 1, & \text{если число перестановок индексов — четное,} \\ -1, & \text{если число перестановок индексов — нечетное.} \end{cases} \qquad (7.17)$$

Например:

$$e^{0123} = e^{1203} = 1, \qquad e^{1023} = -1.$$

Докажем, что (7.17) — тензор относительно преобразований Лоренца. Ранее уже было доказано, что символ Кронекера — постоянная величина, но преобразуется как ковариантный и контравариантный тензор второго ранга. Метрический тензор g_{ik} для инерциальных систем — постоянная величина, однако преобразуется как тензор.

Посмотрим, во что перейдет (7.17) в системе K', если воспользоваться правилами преобразования тензоров:

$$E^{iklm} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^p}\frac{\partial x'^k}{\partial x^r}\frac{\partial x'^l}{\partial x^s}\frac{\partial x'^m}{\partial x^t}e^{prst}.$$

Каждая из этих производных — элемент якобиана, отвечающего переходу из одной системы координат в другую. Из этого якобиана, поскольку p, r, s, t не могут быть одинаковы, берутся члены из разных строк: если бы какие-нибудь два индекса совпали, то в якобиане два столбца были бы одинаковыми, а такие якобианы всегда равны нулю. Тогда становится ясно, что

$$E^{iklm} = J' e^{iklm}.$$

Якобиан перехода $K \to K'$ уже вычислен ранее и равняется:

$$J = \frac{\sqrt{-g'}}{\sqrt{-g}} \quad \Rightarrow \quad J' = \frac{\sqrt{-g}}{\sqrt{-g'}}.$$

В Галилеевской системе координат $g = g' = -1$, поэтому $E^{iklm} = e^{iklm}$, хотя преобразуется по правилам тензора четвертого ранга.

Почему же e^{iklm} называют псевдотензором? У истинного тензора при изменении направления одной из осей системы координат на противоположное: $x^i \to -x^i$ знак должен измениться, а у этой величины он не меняется.

Таким образом, e^{iklm} не ведет себя как тензор при отражении осей координат.

Составим **дуальный тензор**:

$$\tilde{\mathfrak{F}}^{ik} = \frac{1}{2}e^{iklm}\mathfrak{F}_{lm}. \tag{7.18}$$

В этом выражении в правой части контравариантный псевдотензор четвертого ранга умножается на ковариантный тензор второго ранга, поэтому результатом этой операции будет контравариантный псевдотензор второго ранга.

Вычислим некоторые компоненты дуального тензора (7.18)

$$\tilde{\mathfrak{F}}^{01} = \frac{1}{2}e^{0123}\mathfrak{F}_{23} + \frac{1}{2}e^{0132}\mathfrak{F}_{32} = e^{0123}\mathfrak{F}_{23} = -H_x,$$

поскольку $\mathfrak{F}_{23} = -\mathfrak{F}_{32}$ и $e^{0123} = -e^{0132}$ согласно (7.17).

Аналогично можем вычислить:

$$\tilde{\mathfrak{F}}^{02} = e^{0213}\mathfrak{F}_{13} = -\mathfrak{F}_{13} = -H_y.$$

Найдем еще одну компоненту дуального тензора:

$$\tilde{\mathfrak{F}}^{12} = e^{1203}\mathfrak{F}_{03} = \mathfrak{F}_{03} = E_z,$$

поскольку в данном случае число перестановок индексов e^{iklm} равно двум.

Поступая аналогичным образом для всех оставшихся компонент, получим контравариантный дуальный псевдотензор $\tilde{\mathfrak{F}}^{ik}$:

$$\tilde{\mathfrak{F}}^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -H_x & -H_y & -H_z \\ H_x & 0 & E_z & -E_y \\ H_y & -E_z & 0 & E_x \\ H_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}$$

Очевидно, он получается из ковариантного тензора (7.14) заменой

$$\begin{cases} E \to -H, \\ H \to -E. \end{cases}$$

Рассмотрим, что из себя представляет величина

$$\frac{\partial \tilde{\mathfrak{F}}^{ik}}{\partial x^k}.$$

Контравариантный псевдотензор второго ранга при свертке с ковариантным вектором дает контравариантный псевдовектор , который должен вести себя неправильно относительно отражения осей координат. По аналогии с (7.15) можем записать:

$$\frac{\partial \tilde{\mathfrak{F}}^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c}\tilde{g}^i,$$

тогда для нулевой компоненты получим:

$$-\operatorname{div}\vec{H} = -\frac{4\pi}{c}\tilde{g}^0.$$

если под g_0 понимать плотность магнитного заряда, то это было бы уравнение для магнитного заряда. На сегодняшний день магнитные заряды не обнаружены, поэтому $\tilde{g}^0 = 0$, и, следовательно

$$\frac{\partial \tilde{\mathfrak{F}}^{ik}}{\partial x^k} = 0. \tag{7.19}$$

Поскольку псевдовектор (7.19) равен нулю в одной системе координат, то он равен нулю в любой другой системе координат. Для нулевой компоненты (7.19) тогда получим:

$$\operatorname{div}\vec{H} = 0,$$

а для $i = 1, 2, 3$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t},$$

то есть в точности **первую пару уравнений Максвелла**.

Теперь понятно, что, поскольку направления полей — элементы тензора электромагнитного поля, можем найти преобразование полей из одной системы координат в другую.