ЛЕКЦИЯ 8

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПОЛЕЙ. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

На прошлой лекции были получены выражения для ковариантного и контравариантного тензора электромагнитного поля. Эти тензоры антисимметричны, поэтому достаточно записать лишь их диагональные компоненты (которые равны нулю) и шесть компонент выше или ниже диагонали:

$$\mathfrak{F}_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ & 0 & -H_z & H_y \\ & & 0 & -H_x \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{F}^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ & 0 & -H_z & H_y \\ & & 0 & -H_x \\ & & & 0 \end{pmatrix} \tag{8.1}$$

Было установлено, что существует дуальный тензор

$$\tilde{\mathfrak{F}}^{ik} = \frac{1}{2} e^{iklm} \mathfrak{F}_{lm} = \begin{pmatrix} 0 & -H_x & -H_y & -H_z \\ & 0 & E_z & -E_y \\ & & 0 & E_x \\ & & & 0 \end{pmatrix},$$

который получается из ковариантного тензора электромагнитного поля с помощью замены $H \to -E,\ E \to -H$.

Видно, что компоненты электромагнитного поля входят в тензор неравноправно: магнитное поле есть компоненты трехмерного тензора ($-H_z = \mathfrak{F}_{12}$), в то время как компоненты электрического поля, когда нулевой индекс t фиксирован, образуют вектор ($E_z = \mathfrak{F}_{03}$).

С математической точки зрения полезно ввести **трехмерный совершенно антисимметричный тензор**

$$e^{\alpha\beta\gamma} = \begin{cases} 0, & \text{если любые две компоненты одинаковы,} \\ \pm 1, & \text{если все компоненты различны.} \end{cases}$$

При этом $\alpha,\ \beta$ *и* γ принимают значения $1, 2, 3$. Компонента

$$e^{123} = 1,$$

а перестановка любых двух соседних индексов изменяет знак компоненты на противоположный, например:

$$e^{213} = e^{132} = -1, \qquad e^{231} = e^{312} = 1.$$

С помощью этого псевдотензора в трехмерном пространстве любому антисимметричному тензору второго ранга $A_{\alpha\beta} = -A_{\beta\alpha}$ можно сопоставить некий вектор. В трехмерном пространстве антисимметричный тензор второго ранга имеет три компоненты:

$$\begin{pmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ & 0 & A_{23} \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

В трехмерном пространстве вектор также имеет три компоненты, поэтому антисимметричному тензору можно сопоставить псевдовектор (в дальнейшем псевдовеличины условимся обозначать тильдой сверху).

$$\tilde{A}_\alpha = \frac{1}{2} e_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta\gamma}$$

Например, для x-компоненты этого вектора можем записать:

$$\tilde{A}_x = \frac{1}{2} e_{123} A_{23} + \frac{1}{2} e_{132} A_{32} = \Bigg/ \begin{matrix} A_{32} = -A_{23} \\ e_{132} = -e_{123} \end{matrix} \Bigg/ = e_{123} A_{23} = A_{yz}.$$

Аналогично можно увидеть, что

$$-H_x = e_{123}\,\mathfrak{F}_{23} = -H_x, \quad \text{так как } e_{123} = 1,$$

то есть $\vec{H}$ преобразуется не как обычный вектор, а как псевдовектор: при отражении трехмерных осей координат он не меняет знак. Однако полярный вектор $\vec{E}$ в трехмерном пространстве при отражении осей меняет знак на противоположный.

С помощью трехмерного совершенно антисимметричного псевдотензора можно записать **векторное произведение**:

$$[\vec{a}, \vec{b}]_\alpha = e_{\alpha\beta\gamma} a_\beta b_\gamma.$$

Например, для x-компоненты:

$$[\vec{a}, \vec{b}]_x = e_{123} a_y b_z + e_{132} a_z b_y = a_y b_z - a_z b_y,$$

то есть в точности x-компонента векторного произведения.

По определению, ротор некоторого вектора есть векторное произведение оператора набла и этого вектора, следовательно, его тоже можно записать с помощью антисимметричного псевдотензора.

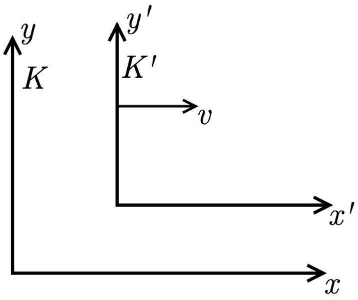

Рис. 8.1

1. Преобразование полей

Пусть некоторая система координат K' движется относительно K со скоростью $\vec{v}$ (см. рис. 8.1) и пусть поле в системе K известно. Найдем поле в системе K'. Например, попробуем узнать поле, действующее на движущуюся частицу в ее собственной системе координат.

Напряженность электрического и магнитного поля является компонентами тензора второго ранга, закон преобразования которого известен — тензор второго ранга A^{ik} преобразуется как произведение двух контравариантных векторов:

$$A^{ik} \sim A^i B^k.$$

Поэтому, если при движении системы K' поперечные координаты y и z не преобразуются, то не преобразуется и величина поля.

$$H_x = -\mathfrak{F}^{23},$$

а так как ни вторая, ни третья координата не преобразуются, то

$$H'_x = -\mathfrak{F}'^{23} = -\mathfrak{F}^{23} = H_x.$$

Таким образом, продольная движению компонента магнитного поля не преобразуется.

$$E'_x = -\mathfrak{F}'^{01},$$

а поскольку нулевая и первая координаты преобразуются, то для вычисления E'_x надо было бы написать законы преобразования тензора.

Вместо этого рассмотрим дуальный тензор. В нем

$$E_x = \tilde{\mathfrak{F}}^{23}.$$

Дуальный тензор при непрерывных преобразованиях координат преобразуется как обычный тензор (он неправильно преобразуется лишь при отражениях осей системы координат).

Поэтому x-компоненту электрического поля можно рассматривать как компоненту дуального тензора $\tilde{\mathfrak{F}}$:

$$E'_x = \tilde{\mathfrak{F}}'^{23} = \tilde{\mathfrak{F}}^{23} = E_x,$$

поскольку вторая и третья координаты не преобразуются.

Таким образом, компоненты, параллельные движению системы координат K', не преобразуются. Рассмотрим, как преобразуются другие компоненты полей, например E_y:

$$E'_y = -\mathfrak{F}'^{02}\,.$$

Тензор преобразуется как произведение двух векторов, один из которых имеет индекс 0, а второй — индекс 2 (этот вектор не преобразуется). Напомним, что преобразования Лоренца для нулевой и первой компонент имеют вид:

$$x'^0 = ct' = \frac{x^0 - \frac{v}{c}x^1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad x'^1 = ct' = \frac{x^1 - \frac{v}{c}x^0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Следовательно, для E'_y можем записать:

$$E'_y = -\mathfrak{F}'^{02} = -\gamma\left(\mathfrak{F}^{02} - \frac{v}{c}\,\mathfrak{F}^{12}\right) = \gamma\left(E_y - \frac{v}{c}H_z\right).$$

Так как скорость направлена вдоль оси x, то $v_x = x$. Запишем y-компоненту векторного произведения скорости и напряженности магнитного поля:

$$[\vec{v},\vec{H}]_2 = e_{213}v_xH_z = -vH_z,$$

следовательно, выражение для преобразованной компоненты электрического поля примет вид:

$$E'_y = \gamma\left(E_y + \frac{1}{c}[\vec{v},\vec{H}]_y\right)$$

Действуя аналогично, можно показать, что

$$E'_z = \gamma\left(E_z + \frac{1}{c}[\vec{v},\vec{H}]_z\right),$$
$$H'_y = \gamma\left(H_y - \frac{1}{c}[\vec{v},\vec{E}]_y\right),$$
$$H'_z = \gamma\left(H_z - \frac{1}{c}[\vec{v},\vec{E}]_z\right).$$

Попробуем записать эти преобразования в более компактной форме. Напряженность электрического поля есть векторная сумма продольной и поперечной составляющей:

$$\vec{E}'_\parallel = \vec{E}_\parallel, \qquad \vec{E}'_\perp = \gamma(\vec{E}_\perp + \frac{1}{c}[\vec{v},\vec{H}]).$$

С другой стороны $\vec{E}_\parallel$ — проекция $\vec{E}$ на единичный вектор в направлени скорости:

$$\vec{E}_\parallel = \frac{(\vec{E}\vec{v})\vec{v}}{v^2} \quad\Rightarrow\quad \vec{E}_\perp = \vec{E} - \vec{E}_\parallel = \vec{E} - \frac{(\vec{E}\vec{v})\vec{v}}{v^2}.$$

Можем теперь записать общее преобразование $\vec{E}$:

$$\vec{E}' = \frac{(\vec{E}\vec{v})\vec{v}}{v^2} + \gamma\left(\vec{E} - \frac{(\vec{E}\vec{v})\vec{v}}{v^2} + \frac{1}{c}[\vec{v},\vec{H}]\right).$$

Немного упростив эту формулу, получим:

$$\vec{E}' = \gamma\left(\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{v}, \vec{H}]\right) - (\gamma - 1)\frac{(\vec{E}\vec{v})\vec{v}}{v^2}.$$

Упростим коэффициент при $(\vec{E}\vec{v})\vec{v}$. Для сокращения объема выкладок не будем писать подкоренное выражение в γ:

$$\frac{\gamma - 1}{v^2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{\ }} - 1}{v^2} = \frac{1 - \sqrt{\ }}{v^2\sqrt{\ }} = \frac{(1 - \sqrt{\ })(1 + \sqrt{\ })}{v^2\sqrt{\ }(1 + \sqrt{\ })}.$$

Поскольку

$$(1 - \sqrt{\ })(1 + \sqrt{\ }) = 1 - (1 - \frac{v^2}{c^2}) = \frac{v^2}{c^2},$$

то выражение примет вид:

$$\frac{\gamma - 1}{v^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\frac{1}{\sqrt{\ }}}{\left(\frac{1}{\sqrt{\ }} + 1\right)\sqrt{\ }} = \frac{1}{c^2}\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{\ }}\right)^2}{\frac{1}{\sqrt{\ }} + 1} = \frac{1}{c^2}\frac{\gamma^2}{\gamma + 1}.$$

Таким образом, преобразование электрического поля примет вид:

$$\vec{E}' = \gamma\left(\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{v}, \vec{H}]\right) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1}\frac{(\vec{E}\vec{v})\vec{v}}{c^2}. \tag{8.2}$$

В нерелятивистском приближении $v^2 \ll c^2$, поэтому $\gamma \approx 1$. В этом случае выражение (8.2) примет вид:

$$\vec{E}' = \vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{v}, \vec{H}],$$

то есть в точности силе Лоренца.

С физической точки зрения этот результат понятен: для движущейся частицы магнитное поле в ее собственной системе координат отсутствует, поскольку в собственной системе координат скорость частицы равна нулю. Однако электрическое поле на частицу действует, и, поскольку физические законы не зависят от выбора инерциальной системы координат, электрическое поле оказывается в точности равно силе Лоренца (здесь $\vec{H}$ — магнитное поле в лабораторной системе координат).

Проделав те же преобразования для магнитного поля, получим:

$$\vec{H}' = \gamma\left(\vec{H} - \frac{1}{c}[\vec{v}, \vec{E}]\right) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1}\frac{(\vec{H}\vec{v})\vec{v}}{c^2}. \tag{8.3}$$

Итак, преобразования электрического и магнитного полей от неподвижной систе- мы

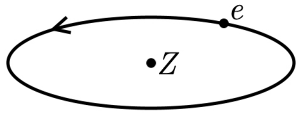

Рис. 8.2

координат к движущейся получены.

Пример 15 Пусть вокруг ядра с зарядом Z движется электрон (см. рис. 8.2). В неподвижной системе координат

$$\vec{E} = \frac{Ze}{r^3}\vec{r}, \qquad \vec{H} = 0.$$

Найдем магнитное поле $\vec{H}'$ в системе координат, где электрон покоится. Дело в том, что у электрона есть магнитный момент, поэтому, чтобы рассчитать энергию взаимодействия этого момента с магнитным полем нужно знать магнитное поле $\vec{H}'$ в системе покоя электрона.

Пусть электрон имеет скорость v. Тогда, воспользовавшись нерелятивистским приближением и формулой (8.3), получим

$$\vec{H}' = \vec{H} - \frac{1}{c}[\vec{v}, \vec{E}] = \frac{1}{c}[\vec{E}, \vec{v}] = \frac{1}{c}\frac{Ze}{r^3}[\vec{r}, \vec{v}].$$

Векторное произведение в этом выражении можно дополнить так, чтобы получился момент импульса:

$$\vec{L} = [\vec{r}, m\vec{v}] \quad \Rightarrow \quad \vec{H}' = \frac{Ze}{mc}\frac{1}{r^3}\vec{L}$$

Поскольку момент импульса по определению есть векторное произведение, то есть псевдовектор, сопоставленный антисимметричному тензору. *

2. Инварианты поля

Полевые величины, не меняющиеся при преобразованиях координат, называют **инвариантами поля**. Произведение $\mathfrak{F}^{ik}\mathfrak{F}_{ik}$ — скаляр, то есть он не меняется относительно преобразования полей. Вычислив его как произведение матриц, получим **первый инвариант поля**:

$$I_1 = \mathfrak{F}^{ik}\mathfrak{F}_{ik} = 2(\vec{H}^2 - \vec{E}^2).$$

Второй инвариант поля имеет вид:

$$I_2 = \tilde{\mathfrak{F}}^{ik}\mathfrak{F}_{ik} = -4(\vec{E}, \vec{H}).$$

I_2 — **псевдоскаляр**, поскольку преобразуется как произведение ко- и контравариантного псевдотензора. Если величина является псевдоскаляром, то при преобразованиях Лоренца она является скаляром, однако при отражении осей системы координат псевдоскаляр начинает вести себя «неправильно».

В нашем случае I_2 — псевдоскаляр, то есть при отражении осей координат $\vec{E}$ меняет знак, но $\vec{H}$ не меняет знак, но относительно преобразований Лоренца I_2 — скаляр.

Эти инварианты позволят нам в дальнейшем при рассмотрении принципа наименьшего действия вывести уравнения Максвелла теоретически, исходя из требований теории относительности.

Следствия:

$$\text{Если } I_1 > 0 \quad \Rightarrow \quad |\vec{H}| > |\vec{E}| \text{ всюду},$$
$$\text{Если } I_1 < 0 \quad \Rightarrow \quad |\vec{H}| < |\vec{E}| \text{ всюду},$$
$$\text{Если } I_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad |\vec{H}| = |\vec{E}| \text{ всюду}.$$

Следствия: Если $I_2 < 0$ ($I_2 > 0$), то угол между $\vec{E}$ и $\vec{H}$: $\vec{E} \wedge \vec{H} = \alpha < \frac{\pi}{2}$ ($> \frac{\pi}{2}$). Если $I_2 = 0$, то $\vec{E} \perp \vec{H}$. ■

Следствия: Пусть в некоторой системе координат $\vec{E} = 0$. Тогда в любой системе координат либо $\vec{E}' = 0$, либо $\vec{E}' \perp \vec{H}'$. ■

Можно рассуждать и наоборот. Пусть $\vec{E} \perp \vec{H}$ в случае, когда $|\vec{E}| < |\vec{H}|$ (см. рис. 8.3). Обозначим $E_y = E$, $H_z = H$.

В этом случае всегда можно найти систему координат, в которой электрическое поле будет равно нулю, если $(\vec{E}\vec{H})$ =

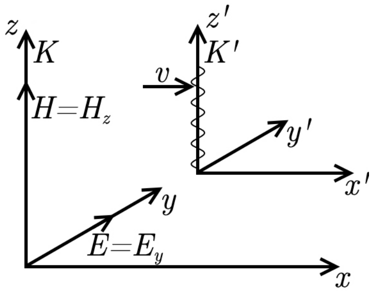

Рис. 8.3

Пусть система координат K' движется со скоростью $\vec{v}$. Воспользовавшись преобразованием y-компоненты поля, получим:

$$E'_y = \gamma\left(E_y + \frac{1}{c}[\vec{v}, \vec{H}]_y\right) = \gamma\left(E - \frac{1}{c}vH\right).$$

Пусть скорость v такова, что

$$\frac{v}{c} = \frac{E}{H} < 1 \quad \Rightarrow \quad E'_y = 0.$$

В векторном виде скорость можем записать так:

$$\vec{v} = \frac{c[\vec{E}, \vec{H}]}{H^2}.$$

Таким образом, если система координат движется со скоростью $\vec{v}$, то в ней напряженность электрического поля исчезает. При наличии только магнитного поля движение происходит по окружности (по спирали с постоянной скоростью в направлении оси z) со сдвигом (дрейфом) вдоль оси x. Таким образом $\vec{v}$ — **скорость дрейфа**.

Попробуем с физической точки зрения понять, почему в скрещивающихся полях, когда $|\vec{H}| > |\vec{E}|$, происходит дрейф. Для этого посмотрим на рисунок 8.3 сверху (см. рис. 8.4).

На участке 1 положительно заряженная частица ускоряется, поэтому сила $F_л \sim [\vec{v}, \vec{H}]$ больше, чем сила на противоположном участке 2, где частица замедляется.

Скорость дрейфа приходится устранять в устройствах для осуществления управляемой термоядерной реакции.

Следствия: Если $I_1 = 0$ и $I_2 = 0$, то $|\vec{E}| = |\vec{H}|$ и $\vec{E} \perp \vec{H}$. Физическое явление, обладающие такими свойствами — электромагнитная волна: в любой системе координат у электромагнитной волны направления магнитного и электрического полей перпендикулярны, а напряженности полей равны по модулю. ■

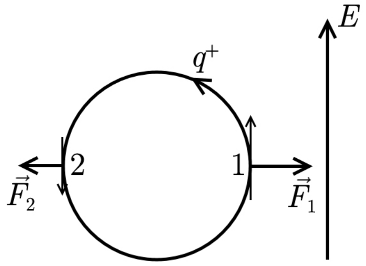

Рис. 8.4

3. Энергия электромагнитного поля

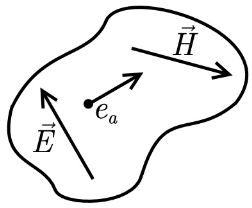

Рис. 8.5

Рассмотрим некоторую полость (см. рис. 8.5), в которой двигаются какие-то заряженные частицы e_a и есть электрическое и магнитное поле.

Изменение энергии частиц в такой системе

$$\frac{d\mathcal{E}_a}{dt} = e_a(\vec{v}_a\vec{E}),$$

где $\vec{v}_a$ — скорость одной частицы.

Общая энергия

$$\mathcal{E} = \sum_a \mathcal{E}_a \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \sum_a e_a(\vec{v}\vec{E}).$$

Если частицы распределены с некоторой плотностью зарядов ρ, то

$$e_a\vec{v}_a = \rho\, d^3x \cdot \vec{v}_a = \vec{j}_a\, d^3x,$$

где $\vec{j}_a$ — ток, который создает a-ая частица.

Тогда изменение энергии всей системы примет вид:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \iiint\limits_V \vec{j}\vec{E}\, d^3x.$$

Воспользовавшись уравнениями Максвелла, выразим ток через компоненты поля:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \vec{j} = \frac{c}{4\pi}\operatorname{rot}\vec{H} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.$$

В этом случае:

$$(\vec{j},\vec{E}) = -\frac{1}{4\pi}\vec{E}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \frac{c}{4\pi}\vec{E}\operatorname{rot}\vec{H}.$$

Видно, что в этом выражении $\vec{E}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ — половина полной производной по времени от $\vec{E}^2$. Согласно определению векторного произведения:

$$\vec{E}\,\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{E}[\vec{\nabla}, \vec{H}].$$

Это смешанное произведение, поэтому

$$\vec{\nabla}[\vec{E}, \vec{H}] = \vec{H}[\vec{\nabla}, \vec{E}] - \vec{E}[\vec{\nabla}, \vec{H}] = \vec{H}[\vec{\nabla}, \vec{E}] - \vec{E}\,\mathrm{rot}\,\vec{H}.$$

Следовательно:

$$\frac{c}{4\pi}\vec{E}\,\mathrm{rot}\,\vec{H} = \frac{c}{4\pi}\left(-\,\mathrm{div}[\vec{E}, \vec{H}] + \vec{H}\,\mathrm{rot}\,\vec{E}\right).$$

Согласно уравнениям Максвелла:

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \quad\Rightarrow\quad \frac{c}{4\pi}\vec{E}\,\mathrm{rot}\,\vec{H} = -\frac{1}{4\pi}\vec{H}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} - \frac{c}{4\pi}\,\mathrm{div}[\vec{E}, \vec{H}]$$

Видно, что в этом выражении $\vec{H}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$ — половина полной производной по времени от $\vec{H}^2$ (аналогично уже полученному выражению для $\vec{E}^2$), поэтому, если вынести производную по времени, получим:

$$\frac{d}{dt}\left(\mathcal{E}_{ч} + \iiint\limits_V \frac{E^2 + H^2}{8\pi} d^3x\right) = -\frac{c}{4\pi}\iiint_V \mathrm{div}[\vec{E}, \vec{H}]\, d^3x. \tag{8.4}$$

Интеграл по объему от дивергенции равен потоку вектора через поверхность. Введем вектор

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}[\vec{E}, \vec{H}], \tag{8.5}$$

в этом случае выражение (8.4) примет вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\mathcal{E}_{ч} + \iiint\limits_V \frac{E^2 + H^2}{8\pi} d^3x\right) = -\oiint (\vec{S}\vec{n})d\sigma, \tag{8.6}$$

где $d\sigma$ — элемент поверхности.

Рассмотрим частный случай: пусть интеграл по поверхности в (8.6) обращается в ноль (например, потому что $\vec{S} \sim [\vec{E}, \vec{H}] = 0$). Тогда величина в скобках (сумма энергии частиц и некоторого полевого выражения) в левой части (8.6) будет сохраняться.

В замкнутой системе сохраняется энергия, следовательно, величину

$$\iiint\limits_V \frac{E^2 + H^2}{8\pi} d^3x$$

можно рассматривать как **энергию электромагнитного поля**, а подынтегральную величину — как **плотность энергии электромагнитного поля**:

$$\varepsilon = \frac{E^2 + H^2}{8\pi}.$$

В случае, когда интеграл по поверхности в правой части (8.6) не равен нулю, общая энергия уменьшается, то есть существует поток энергии через поверхность. Поэтому вектор $\vec{S}$ — **плотность потока энергии**.

Плотность электромагнитной энергии имеет размерность

$$[\varepsilon] = \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3},$$

а размерность плотности потока энергии

$$[\varepsilon] = \frac{\text{эрг}}{\text{см}^2 \cdot \text{с}}.$$

Вектор $\vec{S}$ называется **вектором Пойнтинга** (или вектором Умова–Пойнтинга), так как Умов также вводил такую величину. Таким образом, выражение (8.6) представляет из себя **закон сохранения энергии**, котором $\vec{S}$ представляет собой плот- ность потока

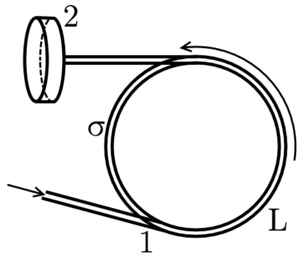

Рис. 8.6

энергии.

Пример 16 На Серпуховском ускорителе в кольце площадью $\sigma \approx 200$ см^2 и длиной окружности $L = 1{,}5$ км создавалось магнитное поле $H \approx 10^4$ Гс. Тогда энергия в этом кольце достигала значения $\varepsilon = 10$ МДж.

Схема работы ускорителя представлена на рисунке 8.6: в кольцо (1) впрыскиваются частицы, затем магнитное поле увеличивают до предельного значения. Некоторое время частицы вращаются в кольце, затем поле надо выключить. Для того, чтобы энергия частиц не терялась, в Серпухове она подавалась на мотор генератора, раскручивавшего диск (2) весом 60 тонн.

Таким образом, можно было непосредственно наблюдать фазы работы ускорителя: если маховик раскручивается, значит осуществляется сброс магнитного поля. Если же маховик замедляется, значит часть его энергии идет на создание магнитного поля в кольце.

Из-за того, что не удалось достроить ускорительно-накопительный комплекс, сейчас под землей есть кольцо длиной $L = 21$ км и полем 60000 Гс. Существуют предложения установить по свей длине этого кольца сверхпроводящую катушку радиусом $R \sim 0{,}5$ метра, тогда запасенная в этом кольце энергия будет достигать 240 ГДж.

Для сравнения мощность атомной электростанции (например, мощность одного блока Чернобыльской АЭС) составляла примерно 1 ГВт, поэтому такое кольцо смогло бы на четыре минуты заменить подобную АЭС. $*$

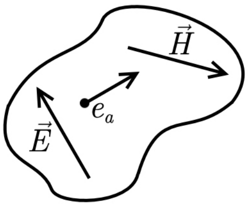

Рис. 8.7

4. Импульс электромагнитного поля

Постановка задачи ничем не отличается от постановки для энергии электромагнитного поля: рассматриваем некоторую полость (см. рис. 8.7), в которой двигаются какие-то заряженные частицы e_a и есть электрическое и магнитное поле.

Изменение импульса частицы:

$$\frac{d\vec{p}_a}{dt} = e_a\vec{E} + \frac{e_a}{c}[\vec{v}_a, \vec{H}],$$

или, переходя к непрерывному распределению зарядов, получим:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \iiint\limits_V \rho\vec{E}\,d^3x + \frac{1}{c}\iiint\limits_V [\vec{j}, \vec{H}]\,d^3x \tag{8.7}$$

Из уравнений Максвелла знаем, что:

$$\rho = \frac{\operatorname{div}\vec{E}}{4\pi}, \qquad \vec{j} = \frac{c}{4\pi}\operatorname{rot}\vec{H} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.$$

В этом случае:

$$\frac{1}{c}[\vec{j}, \vec{H}] = \frac{1}{4\pi}\left([\operatorname{rot}\vec{H}, \vec{H}] - \frac{1}{c}[\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}, \vec{H}]\right) =$$
$$= \frac{1}{4\pi}\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}[\vec{E}, \vec{H}] + \frac{1}{c}[\vec{E}, \frac{\partial\vec{H}}{\partial t}] - [\vec{H}, \operatorname{rot}\vec{H}]\right).$$

Из уравнений Максвелла знаем, что:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = -\operatorname{rot}\vec{E} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{c}[\vec{j}, \vec{H}] = \frac{1}{4\pi}\left(-\frac{\partial}{\partial t}\frac{[\vec{E}, \vec{H}]}{c} - [\vec{E}, \operatorname{rot}\vec{E}] - [\vec{H}, \operatorname{rot}\vec{H}]\right).$$

Перенеся полную производную по времени в левую часть (8.7), получим:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{P}_ч + \iiint\limits_V \frac{[\vec{E}, \vec{H}]}{4\pi c}\,d^3x\right) = \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_V \left\{\vec{E}\operatorname{div}\vec{E} - [\vec{E}, \operatorname{rot}\vec{E}] - [\vec{H}, \operatorname{rot}\vec{H}]\right\}\,d^3x.$$

Из векторного анализа известно, что:

$$\vec{\nabla}(\vec{A}, \vec{B}) = [\vec{A}, \operatorname{rot}\vec{B}] + (\vec{A}, \vec{\nabla})\vec{B} + [\vec{B}, \operatorname{rot}\vec{A}] + (\vec{B}, \vec{\nabla})\vec{A},$$

следовательно, если $\vec{A} = \vec{B} = \vec{E}$, то:

$$\vec{\nabla}\frac{E^2}{2} = (\vec{E},\vec{\nabla})\vec{E} + [\vec{E},\operatorname{rot}\vec{E}] \quad \Rightarrow \quad [\vec{E},\operatorname{rot}\vec{E}] = \vec{\nabla}\frac{E^2}{2} - (\vec{E},\vec{\nabla})\vec{E}.$$

Аналогичным образом можно показать, что

$$[\vec{H},\operatorname{rot}\vec{H}] = \vec{\nabla}\frac{H^2}{2} - (\vec{H},\vec{\nabla})\vec{H}.$$

Тогда в правой части можем преобразовать:

$$\left\{(\vec{E},\vec{\nabla})\vec{E} + \vec{E}\operatorname{div}\vec{E}\right\}_\alpha = E_\beta\frac{\partial E_\alpha}{\partial x^\beta} + E_\alpha\frac{\partial E_\beta}{\partial x^\beta} = \frac{\partial}{\partial x^\beta}(E_\alpha E_\beta).$$

На этом прервемся, а окончательный результат получим на следующей лекции.