ЛЕКЦИЯ 9

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ. ФУНКЦИИ ЛАГРАНЖА И ГАМИЛЬТОНА ДЛЯ СВОБОДНОЙ ЧАСТИЦЫ

1. Импульс электромагнитного поля

На прошлой лекции рассмотрели импульс электромагнитного поля и получили следующее выражение:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{P}_{ч} + \iiint\limits_V \frac{[\vec{E},\vec{H}]}{4\pi c}\, d^3x\right) = \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_V \left\{\vec{E}\operatorname{div}\vec{E} - [\vec{E},\operatorname{rot}\vec{E}] - [\vec{H},\operatorname{rot}\vec{H}]\right\} d^3x, \tag{9.1}$$

где $\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho$ согласно уравнениям Максвелла.

Из векторного анализа известно, что:

$$\vec{\nabla}(\vec{A},\vec{B}) = [\vec{A},\operatorname{rot}\vec{B}] + (\vec{A},\vec{\nabla})\vec{B} + [\vec{B},\operatorname{rot}\vec{A}] + (\vec{B},\vec{\nabla})\vec{A},$$

следовательно, если $\vec{A} = \vec{B} = \vec{E}$, то:

$$\vec{\nabla}\frac{E^2}{2} = (\vec{E},\vec{\nabla})\vec{E} + [\vec{E},\operatorname{rot}\vec{E}] \quad \Rightarrow \quad [\vec{E},\operatorname{rot}\vec{E}] = \vec{\nabla}\frac{E^2}{2} - (\vec{E},\vec{\nabla})\vec{E}.$$

Аналогичным образом можно показать, что

$$[\vec{H},\operatorname{rot}\vec{H}] = \vec{\nabla}\frac{H^2}{2} - (\vec{H},\vec{\nabla})\vec{H}.$$

Тогда правая часть выражения (9.1) для электрического поля примет вид:

$$-\vec{\nabla}\frac{E^2}{2} + (\vec{E},\vec{\nabla})\vec{E} + \vec{E}\operatorname{div}\vec{E}. \tag{9.2}$$

Выражение для магнитного поля $\vec{H}$ будет полностью симметрично, за исключением отсутствия $\vec{H}\,\mathrm{div}\,\vec{H}$. Согласно уравнениям Максвелла, $\mathrm{div}\,\vec{H}=0$, поэтому всегда можно дописать эту компоненту. Таким образом, выражение для $\vec{H}$ будет полностью симметрично выражению (9.2).

Удобно перейти к покомпонентной записи. Для α-компоненты выражение (9.1) согласно (9.2) примет вид:

$$(\dots) = \frac{1}{4\pi}\left(-\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{E^2}{2} + E_\beta\frac{\partial}{\partial x^\beta}E_\alpha + E_\alpha\frac{\partial E_\beta}{\partial x^\beta} + \text{симметричная часть } (\vec{E}\leftrightarrow\vec{H})\right).$$

В этом выражении:

$$E_\beta\frac{\partial E_\alpha}{\partial x^\beta} + E_\alpha\frac{\partial E_\beta}{\partial x^\beta} = \frac{\partial}{\partial x^\beta}(E_\alpha E_\beta).$$

Представив оставшийся член как производную по x^β, получим:

$$-\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{E^2}{2} = -\frac{\partial}{\partial x^\beta}\frac{E_\alpha^2}{2}\delta_{\alpha\beta}.$$

В этом случае выражение (9.1) примет вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{P}_ч + \iiint\limits_V \frac{[\vec{E},\vec{H}]}{4\pi c}\,d^3x\right)_\alpha = -\iiint\limits_V \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x^\beta}\,d^3x, \tag{9.3}$$

где

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{E^2+H^2}{2}\delta_{\alpha\beta} - (E_\alpha E_\beta + H_\alpha H_\beta)\right) \tag{9.4}$$

В выражении (9.4) компонента α фиксирована. Тогда правую часть выражения (9.3) можно рассматривать как интеграл от дивергенции тензора. Тогда, воспользовавшись теоремой Гаусса, можем свести тройной и интеграл к интегралу по поверхности, охватывающему выделенный объем. В этом случае выражение (9.3) примет вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{P}_ч + \iiint\limits_V \frac{[\vec{E},\vec{H}]}{4\pi c}\,d^3x\right)_\alpha = -\oiint T_{\alpha\beta}n_\beta\,d\sigma, \tag{9.5}$$

где n_β — единичный вектор нормали,
$d\sigma$ — элемент площади.

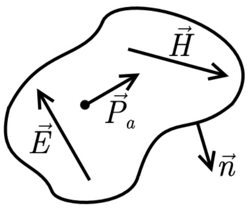


Рис. 9.1

То есть для некоторой области (см. рис. 9.1), в которой есть частицы с некоторыми импульсами, а также электрическое и магнитное поле, изменение левой части (9.5) выражается через поток тензора $T_{\alpha\beta}$ через поверхность. Под вектором $\vec{n}$ понимают единичный вектор перпендикулярный поверхности со стороны падающего излучения.

Рассмотрим два случая поглощения электромагнитного поля: пусть **в первом случае** электромагнитное излучение полностью поглощается в оболочке, тогда

$$\oiint T_{\alpha\beta} n_\beta \, d\sigma = 0.$$

В этом случае левая часть (9.5) также будет равна нулю, то есть выражение

$$\vec{P}_{ч} + \iiint\limits_V \frac{[\vec{E}, \vec{H}]}{4\pi c} \, d^3x = \text{const}.$$

Это можно трактовать следующим образом: это выражение — импульс электромагнитного поля, то есть сохраняется суммарный импульс частиц и импульс поля. **Плотность импульса электромагнитного поля**:

$$\vec{\mathcal{P}} = \frac{[\vec{E}, \vec{H}]}{4\pi c}. \tag{9.6}$$

На прошлой лекции был введен вектор Умова–Пойнтинга $\vec{S}$, представляющий поток энергии:

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}[\vec{E}, \vec{H}] \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathcal{P}} = \frac{\vec{S}}{c^2},$$

то есть импульс электромагнитного поля связан с потоком энергии.

С другой стороны, пусть задана плотность энергии электромагнитного поля ε, тогда поток будет равен:

$$\vec{S} = \varepsilon c \vec{n}, \tag{9.7}$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор в направлении распространения поля.

С учетом (9.7) можем записать выражение для плотности потока импульса:

$$\vec{\mathcal{P}} = \frac{\varepsilon}{c}\vec{n} = \frac{\vec{S}}{c^2}.$$

Итак, $\vec{\mathcal{P}}$ есть плотность импульса электромагнитного поля. Полный импульс, соответственно, определяется как интеграл по объему от (9.6).

Рассмотрим теперь **второй случай**, когда интеграл по поверхности

$$\oiint T_{\alpha\beta} n_\beta \, d\sigma \neq 0.$$

Тогда выражение в левой части (9.5) — изменение полного импульса системы (импульса электромагнитного поля и импульса вещества).

Изменение импульса связано с силой, поэтому, если изменение импульса выражается контурным интегралом, можно сказать, что подынтегральное выражение — сила, действующая на площадку $d\sigma$.

Рассмотрим некоторую поверхность (см. рис. 9.2). Выберем на ней площадку так,

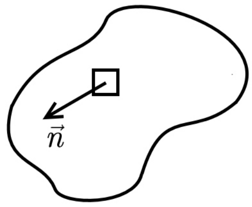


Рис. 9.2

чтобы единичный вектор нормали $\vec{n}$ был направлен вдоль оси x:

$$n_x = 1, \qquad n_y = n_z = 0.$$

Видно, что в этом случае сила, направленная вдоль оси x равна

$$df_x = T_{xx}\, d\sigma$$

и действует она перпендикулярно поверхности, следовательно T_{xx} есть не что иное, как давление:

$$T_{xx} = P.$$

Вдоль оси y сила

$$df_y = T_{yx}\, d\sigma$$

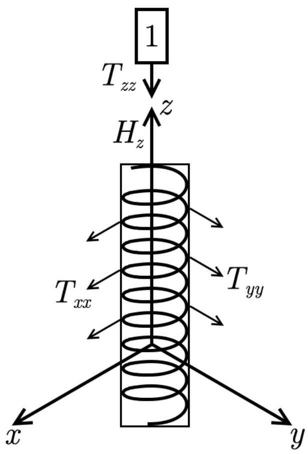


Рис. 9.3

В отличие от газов, где есть только нормальное давление, в случае электромагнитного поля существует также давление, параллельное плоскости, которое называют смещением.

Пример 17 Рассмотрим катушку с магнитным полем, направленным вдоль оси z: $H_z = H$ (см. рис. 9.3). Найдем силы, действующие на оболочку катушки.

В силу симметрии, силы, действующие вдоль оси x и y будут одинаковы. Учитывая, что $\vec{E} = 0$, $H_x = H_y = 0$, и используя (9.4), получим:

$$T_{xx} = T_{yy} = \frac{H^2}{8\pi},$$
$$T_{zz} = \frac{H^2}{8\pi} - \frac{H^2}{4\pi} = -\frac{H^2}{8\pi}.$$

С физической точки зрения это понятно: если расположить металлический предмет (1) на оси z, то он будет втягиваться в катушку, а на ее боковые стенки будет оказываться давление.

Оценим это давление. В вакуумной камере ускорителя в ЦЕРНе создается магнитное поле $H \approx 6$ Тл $= 6 \cdot 10^4$ Гс. В этом случае давление на стенки камеры $P \sim 100$ атм, что соответствует давлению воды на глубине один километр. *

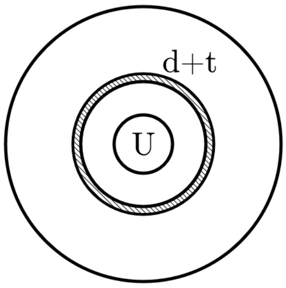


Рис. 9.4

Рассмотрим еще один пример:

Пример 18 Для того, чтобы осуществить термоядерную реакцию, термоядерное топливо надо очень сильно сжать. Один из вариантов, который был предложен, это так называемая «слойка» (см. рис. 9.4), в центре которой находится урановая бомба, а затем чередуются слои термоядерного топлива (дейтерия и трития) и урана.

Во время подрыва урановой бомбы уран полностью ионизуется, и, поскольку

$$p = nkT,$$

благодаря высокой концентрации электронов создается очень большое давление, сжимающее термоядерное топливо, в результате чего оно загорается.

К сожалению, несмотря на то, что сжатие было достаточным, чтобы вызвать термоядерную реакцию, всего 15% энергии выделялось за счет термоядерной реакции.

В результате термоядерной реакции дейтерия с тритием

$$\mathrm{d} + \mathrm{t} \to {}^4\mathrm{He} + n$$

получается нейтрон со сравнительно большой энергией 14 МэВ, способный вызвать деление ^{238}U (который обычно не делится), и за счет этого выделялись остальные 85% энергии.

Мощность бомбы составляла 400 килотонн тринитротолуола (для сравнения, мощность бомбы, сброшенной на Хиросиму, составляла 20 килотонн). Описанное явление получило название «ионизационное сжатие».

Для бомбы большей мощности давление оказалось недостаточным, и увеличении ее размеров не приводило к желаемому результату.

Современное термоядерное оружие основано на принципе радиационного сжатия — сжатия электромагнитным полем. Однако это не значит, что сжатие производится только за счет электромагнитного поля.

Современное ядерное оружие двухступенчатое: в одном месте находится атомная бомба (1), состоящая из урана или плутония, в другом — термоядерный заряд (2)(см. рис. **??**). Вся эта конструкция помещена в толстую металлическую оболочку (3).

При взрыве инициирующей атомной бомбы бóльшая часть энергии взрыва выделяется в виде электромагнитного излучения. Плотность энергии частиц

$$p = nkT,$$

где n — концентрация (число частиц в одном кубическом сантиметре).

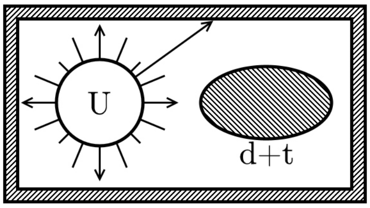
Число фотонов определяется соотношением

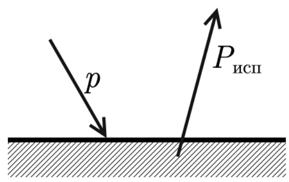
$$n_{\textit{ф}} = \left(\frac{kT}{\hbar c}\right)^3,$$

следовательно, плотность энергии фотонного газа

$$p_{\textit{ф}} = \left(\frac{kT}{\hbar c}\right)^3 kT \gg p, \quad \text{при высоких температурах } T \sim 10^7\ K.$$

При попадании этого электромагнитного излучения на металлическую оболочку проис-





ходит ионизация и, сразу же, рекомбинация. При этом половина фотонов летит наружу, а половина — внутрь оболочки, попадая на термоядерный заряд.

Кроме того, часть электромагнитного излучения атомного заряда попадает на термоядерный заряд непосредственно.

Одного электромагнитного давления недостаточно, чтобы воспламенить термоядерный заряд. Помимо электромагнитного давления существует такое явление, как абляция (испарение вещества с поверхности).

Пусть квант света имеет энергию

$$\varepsilon = \hbar\omega \quad \Rightarrow \quad p = \frac{\hbar\omega}{c},$$

где p — импульс светового кванта.

Падая на поверхность, он передает энергию частице, вылетающей с поверхности наружу (см. рис. **??**), которая свой реактивный импульс передает веществу. Импульс вылетающей частицы (испарительный импульс) определяется выражением:

$$P_{\textit{исп}} = \sqrt{2m\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \frac{P_{\textit{исп}}}{p} = \frac{\sqrt{2m\hbar\omega}}{\frac{\hbar\omega}{c}} \sim \sqrt{\frac{mc^2}{\hbar\omega}}.$$

Энергия светового кванта порядка 1 КэВ, а энергия покоя для электрона составляет 0,5 МэВ, а протона — 938 МэВ, поэтому получается колоссальное усиление.

Важно, чтобы это был мягкий рентген, так как за счет мягкого рентгена с поверхности термоядерного заряда испаряется вещество, дополнительно сжимая этот заряд.

Данное явление получило название «принцип радиационной имплозии». Этот метод был придуман Сахаровым А.Д., Зельдовичем Я.Б. и Трутневым Ю.А.

Колоссальную роль магнитное давление играет и в управляемом термоядерном синтезе. Если в устройстве типа «токамак» образуется плазма, то магнитное поле оказывает давление на плазму.

П.Н. Лебедев впервые измерил световое давление на вещество, а затем и на газы. Он был известен как один из лучших физиков-экспериментаторов мира: его опыты были решающим доказательством справедливости теории Максвелла. Его опытам как раз и мешал радиационный эффект, когда частица, попадая на «крылышко», вылетала с гораздо большим импульсом. $*$

2. Единственность решения уравнений Максвелла

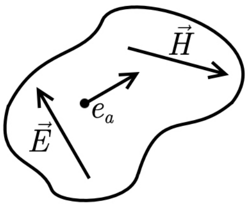


Рис. 9.5

На прошлой лекции было показано, что если в некоторой области есть частицы, электрическое и магнитное поле (см. рис. 9.5), то

$$\frac{d}{dt}\left(\mathcal{E}_ч + \iiint\limits_V \frac{E^2+H^2}{8\pi} d^3x\right) = -\oint\!\!\!\oint (\vec{S}\vec{n})d\sigma. \tag{9.8}$$

Сформулируем очень важную теорему о единственности решения уравнений Максвелла.

Теорема 4 Решение уравнений Максвелла будет единственно, если выполнены следующие условия:

1. Задана плотность зарядов ρ и плотность тока $\vec{j}$;

2. Задано начальное значение электрического и магнитного поля:

$$\vec{E}\big|_{t=0} = \vec{E}_0,\ \vec{H}\big|_{t=0} = \vec{H}_0.$$

3. На поверхности области задана тангенциальная составляющая либо электрического, либо магнитного поля $\vec{E}_t\big|_S$. $*$

Док-во: Докажем утверждение теоремы от противного. Пусть есть два решения $\vec{E}_1, \vec{H}_1$

и $\vec{E}_2, \vec{H}_2$. Будем считать, что они удовлетворяют уравнениям Максвелла и что это разные поля.

Составим суперпозицию полей:

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_1 - \vec{E}_2, \\ \vec{H} = \vec{H}_1 - \vec{H}_2. \end{cases}$$

При подстановке этих значений в уравнения Максвелла, получим:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = \operatorname{div}(\vec{E}_1 - vecE_2) = 4\pi\rho - 4\pi\rho = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{H} = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \end{cases}$$

Получается, что для электромагнитного поля $\vec{E}, \vec{H}$ плотность заряди плотность тока равны нулю. Это возможно, если в области нет частиц, то есть в выражении (9.8) энергия частиц $\mathcal{E}_ч = 0$.

Тангенциальные составляющие полей 1 и 2 на границе области одинаковы, поэтому для их разности граничное условие тождественно равно нулю

$$\vec{E}_t\big|_S = 0.$$

В этом случае поток через поверхность в правой части (9.8) также равен нулю, поэтому

$$\frac{d}{dt}\left(\iiint\limits_V \frac{E^2 + H^2}{8\pi} d^3x\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \iiint\limits_V (E^2 + H^2) d^3x = \text{const}. \tag{9.9}$$

Поскольку для полей 1 и 2 начальные условия одинаковы, то для полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$:

$$\vec{E}\big|_{t=0} = 0, \qquad \vec{H}\big|_{t=0} = 0.$$

В этом случае константа в выражении (9.9) равна нулю, поэтому

$$\iiint\limits_V (E^2 + H^2) d^3x = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{H} = 0, \vec{E} = 0.$$

Стало быть, при таких условиях решение уравнений Максвелла единственное, что и требовалось доказать. ■

3. Функции Лагранжа и Гамильтона для свободной частицы

В предыдущих лекциях были выведены формулы для энергии и импульса электромагнитного поля, и затем, посредством векторных и тензорных преобразований, были получены законы сохранения суммарной энергии (частиц и электромагнитного поля) и суммарного импульса.

Почему все эти вычисления привели именно к такому результату? Нельзя ли было, воспользовавшись другими предположениями, получить другой результат?

Другого результата быть не могло, поскольку, оказывается, электромагнитное поле можно рассматривать как механическую систему с бесконечно большим числом степеней свободы. А для механической системы, если она замкнута, всегда сохраняется и энергия, и импульс.

Ранее мы вынуждены были рассматривать теорию Максвелла, опираясь на опытные факты, считая принцип наименьшего действия неизвестным. В дальнейшем с помощью этого принципа, опираясь на два простейших предположения, уравнения Максвелла будут получены теоретически.

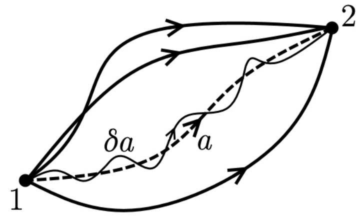


Рис. 9.6

Покажем, в чем заключается **принцип наименьшего действия**. Начнем с самой простой задачи: пусть одна свободная частица движется в плоскости (см. рис. 9.6) из точки 1 в точку 2. Существуют различные траектории такого движения. Однако истинная траектория, по которой происходит движение, может быть найдена из принципа наименьшего действия.

В курсе математического анализа вводилось понятие **функционала**: это отображение, которое каждой функции из некоторого множества ставит в соответствие число. Рассмотрим простейший функционал. Пусть есть множество функций $f(x)$, тогда определенный интеграл

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = C$$

каждой функции из некоторого множества ставит в соответствие число C.

Можно было бы функции $f(x)$ поставить в соответствие некоторое более сложное число

$$\int\limits_a^b L(f(x), f'(x))\,dx,$$

где L — некая функция, зависящая от $f(x)$ и ее производной.

Лагранж обнаружил, что уравнения механики (уравнения Ньютона) можно получить следующим образом: для каждой системы существует функция L, называемая **функцией Лагранжа**, которой можно сопоставить число S, называемое **действием** так, что величина действия равна

$$S = \int\limits_1^2 L(q(t), \dot{q}(t))\,dt, \tag{9.10}$$

где q — координата движущейся частицы,

$\dot{q}$ — производная по времени от координаты q.

Тогда **истинной траектории** отвечает траектория, для которой величина действия принимает экстремальное значение:

$$\delta S = 0.$$

Рассмотрим, какое уравнение получится в этом случае. **Вариацией** называется небольшое отклонение от некоторого значения, например, вариация координаты:

$$q(t) \to q(t) + \delta q(t).$$

Тогда на рисунке 9.6 некоторую траекторию (a) обозначим пунктирной линией, а ее вариацию δa — сплошной. Вариация действия в этом случае примет вид:

$$\delta S = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot q}\delta(\dot q) \right) \, dt. \tag{9.11}$$

Легко показать, что если вариация дифференцируема и достаточно гладкая, то

$$\delta(\dot q) = \delta\left(\frac{dq}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\,\delta q.$$

Воспользовавшись этим, получим, что

$$\frac{\partial L}{\partial \dot q}\frac{d}{dt}\,\delta q = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\,\delta q\right) - \delta q \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q}.$$

В этом выражении уменьшаемое есть полная производная по времени, поэтому выражение для вариации (9.11) примет вид:

$$\delta S = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\,\delta q\right)\Bigg|_{t_1}^{t_2} + \int\limits_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right) \delta q \, dt. \tag{9.12}$$

Вариацию в начале и конце траектории считаем равной нулю, поэтому

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\,\delta q\right)\Bigg|_{t_1}^{t_2} = 0.$$

Так как δq — произвольная, то, чтобы вариация действия обращалась в ноль, выражение в скобке в интеграле (9.12) должно обращаться в ноль. В результате получим **уравнение Лагранжа** для одномерного движения:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} = \frac{\partial L}{\partial q}. \tag{9.13}$$

После Ньютона и Лейбница можно выделить двух людей, которые создали математический аппарат механики и саму механику — это Эйлер, некоторое время работавший в Петербургской академии, и Лагранж, родившийся в Италии, но работавший во Франции.

Если движение трехмерное, то будет несколько переменных $q(t)$, и для каждой будет выполняться уравнение Лагранжа (9.13).

Простой пример функции Лагранжа:

$$L = \frac{m\dot{q}^2}{2}{}_{U}(q),$$

где $U(q)$ — потенциальная энергия, зависящая от координаты q.

В этом случае

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} = P, \qquad \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{dU}{dq} = f, \tag{9.14}$$

где P — импульс частицы,

f — сила, действующая на частицу.

Следовательно, уравнение Лагранжа (9.13) примет вид:

$$\frac{dP}{dt} = f,$$

то есть в точности уравнение Ньютона. Следовательно, уравнение Ньютона можно записать в виде уравнения Лагранжа.

Применим принцип минимального действия теперь к свободной релятивистской частице. В релятивистском случае действие — скаляр. Действительно, пусть в четырехмерном пространстве есть некоторая мировая линия. В разных системах координат траектория (проекции на оси координат) будет разная. Однако сама линия не зависит от того, из какой системы отсчет мы на нее смотрим — она объективно существует в четырехмерном пространстве. Следовательно, если она отвечает минимуму некоторой величины, то эта величина должна быть скаляром, чтобы быть одинаковой во всех системах координат.

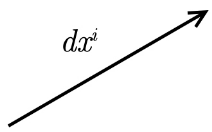


Рис. 9.7

Рассмотрим свободную частицу и попробуем составить для нее действие. Пусть свободная частица переместилась на некоторую малую величину dx^i (см. рис. 9.7), равную

$$dx^i = (c\,dt, d\vec{r}).$$

Инвариант, который может отвечать движению частицы — это квадрат интервала

$$(ds)^2 = c^2\,(dt)^2 - (d\vec{r})^2 \text{ — инвариант.} \tag{9.15}$$

Действие должно быть пропорционально интегралу от интервала, следовательно

$$S = \alpha \int \; ds,$$

где α — некий коэффициент пропорциональности.

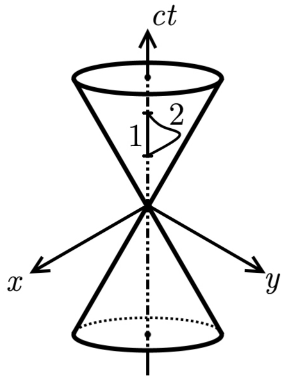


Рис. 9.8

Легко видеть, что коэффициент α должен быть отрицательным.

Ранее на лекциях был рассмотрен световой конус (см. рис. 9.8). В нем мировая линия покоящейся частицы (1) была отрезком на оси ct, а мировая линия частицы, которая вылетела из начала координат и вернулась обратно — кривой (2).

Было также установлено, что в пространстве Минковского у покоящейся частицы наибольший интервал, а не наименьший, то есть в псевдоевклидовом пространстве времениподобная прямая — наибольшее расстояние.

Поэтому, поскольку мы ищем минимум действия, то

$$S = -\alpha \int ds, \quad \alpha > 0. \tag{9.16}$$

Преобразуем выражение для интервала (9.15):

$$ds^2 = c^2(dt)^2 - (d\vec{r})^2 = c^2(dt)^2 - (\vec{v})^2(dt)^2 = (c\,dt)^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

следовательно, выражение для действия (9.16) примет вид:

$$S = -\alpha \int c\,dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \Rightarrow \quad L = -\alpha c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Воспользовавшись (9.14), получим выражение для импульса:

$$\frac{\partial L}{\partial v_x} = \frac{\alpha c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{v_x}{c^2} = \frac{\alpha \frac{v_x}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{9.17}$$

Воспользуемся принципом соответствия: при $v_x \ll c$ выражение (9.17) должно переходить в нерелятивисткий импульс

$$\frac{\partial L}{\partial v_x} = \alpha\frac{v_x}{c} = mv_x \quad \Rightarrow \quad \alpha = mc.$$

Следовательно, выражение для функции Лагранжа свободной частицы примет вид:

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \tag{9.18}$$

а импульс релятивистской частицы примет уже известный ранее вид:

$$\vec{P} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Из (9.18) очевидно, что функция Лагранжа имеет размерность энергии:

$$[L] = [mc^2] = [\varepsilon].$$

Наряду с функцией Лагранжа в механике рассматривается функция Гамильтона. Пусть для свободной частицы функция Лагранжа $L = L(q, \dot{q})$. Тогда

$$dL = \frac{\partial L}{\partial q}\, dq + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\, d\dot{q}. \tag{9.19}$$

Из (9.14) мы знаем, что

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \dot{P}, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = P,$$

следовательно, выражение (9.19) примет вид:

$$dL = \dot{P}\, dq + P\, d\dot{q}. \tag{9.20}$$

Преобразуем второе слагаемое в выражении (9.20):

$$P\, d\dot{q} = d(P\dot{q}) - \dot{q}\, dP,$$

следовательно, выражение (9.20) примет вид:

$$dL = \dot{P}\, dq - \dot{q}\, dP + d(P\dot{q}).$$

Перенеся полный дифференциал в левую часть выражения, получим:

$$d(L - P\dot{q}) = \dot{P}\, dq - \dot{q}\, dP.$$

Величина под дифференциалом, взятая с обратным знаком, называется **функцией Гамильтона** H:

$$H = P\dot{q} - L, \qquad dH = \dot{q}\, dP - \dot{P}\, dq.$$

Это выражение должно быть полным дифференциалом, поэтому **уравнения Гамильтона** имеют вид:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial P}, \qquad \dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial q}.$$

Можно доказать, что если функция Лагранжа не зависит явно от времени (она зависит от времени только через координату и скорость), то в этом случае величина H будет сохраняться и совпадать с энергией. Получим функцию Гамильтона для свободной частицы:

$$H = P\dot{q} - L = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \vec{v} + mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{mv^2 + mc^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

то есть функция Гамильтона в точности равна энергии свободной частицы.

В уравнениях Гамильтона предполагается, что функция Гамильтона зависит от координаты и импульса $H = H(P, q)$, а функция Лагранжа зависит от координаты и ее производной по времени $L = Lq, \dot{q}$. Выразим функцию Гамильтона свободной частицы через P, q. Для этого рассмотрим следующее выражение:

$$\vec{P}^2 + m^2c^2 = \frac{m^2v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} + m^2c^2 = \frac{m^2c^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\vec{P}^2 + m^2c^2} = \frac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

следовательно, функция Гамильтона для свободной частицы примет вид:

$$H = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = c\frac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = c\sqrt{\vec{P}^2 + m^2c^2}.$$

4. Действие для частицы во внешнем электромагнитном поле

Предположим, что электромагнитное поле характеризуется некоторым контравариантным 4-вектором $A^i = (\phi, \vec{A})$. Этот 4-вектор возник на основании эмпирической системы уравнений Максвелла.

Существует теорема Эмми Нётер, согласно которой закон сохранения всегда связан с симметрией. Если симметрии отвечает закон сохранения заряда, выполняющийся в каждой точке, то заряд обязательно должен быть источником некоего 4-векторного поля, которое определяется с точностью до градиентного преобразования, или так называемого калибровочного поля.

Электродинамика — простейший случай калибровочной теории. Закон сохранения заряда, выполняющийся локально, обязательно является источником некоего векторного поля.

Однако мы пока будем просто предполагать, что есть некоторое векторное поле, связанное с частицами. Действие в этом случае представляет собой сумму действия частиц и слагаемого, отвечающего взаимодействию векторного поля с частицами.

То есть надо составить некий интеграл, пропорциональный постоянной величине α, от скаляра, так как действие должно быть скаляром. В качестве скаляра возьмем скалярное произведение ковариантного вектора $A_i = (\phi, -\vec{A})$ и элемента траектории dx^i.

$$S = S_{част} + \alpha \int \quad A_i\, dx^i.$$

Обозначим $\alpha = -e/c$, но пока не говорим, что e — электрический заряд. Тогда действие будет иметь вид:

$$)S = S_{част} - \frac{e}{c}\int \quad A_i\, dx^i. \tag{9.21}$$

Найдем функцию Лагранжа, отвечающую этому действию. Запишем (9.21) в виде:

$$S = S_{част} - \frac{e}{c}\int \quad (A_0 c\, dt - \vec{A}\, d\vec{r}) = S_{част} - \frac{e}{c}\int \quad (\phi c + \vec{A}\vec{v})\, dt.$$

Следовательно, функция Лагранжа частицы во внешнем поле примет вид:

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - e\phi + \frac{e}{c}\vec{A}\vec{v}. \tag{9.22}$$