ЛЕКЦИЯ 10

ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ

На прошлой лекции получили, что действие для свободной частицы

$$S = -mc^2 \int \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt, \quad \Rightarrow \quad L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

где L — функция Лагранжа для свободной частицы.

Для частицы во внешнем поле действие примет вид:

$$S = -mc^2 \int \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt - \frac{e}{c}\int A_i\,dx^i. \tag{10.1}$$

В этом выражении dx^i — 4-вектор перемещения:

$$dx^i = (c\,dt, d\vec{r}) = (c\,dt, \vec{v}\,dt),$$

а $A^i = (\phi, \vec{A})$ — векторное поле. В этом случае ковариантный вектор $A_i = (\phi, -\vec{A})$.

Поделив и умножив (10.1) на dt, получим **функцию Лагранжа для частицы во внешнем поле**:

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{e}{c}(c\phi - \vec{A}\vec{v}) = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - e\phi + \frac{e}{c}\vec{A}\vec{v}. \tag{10.2}$$

Обобщенный импульс

$$\vec{\mathcal{P}} = \vec{\nabla}_{\vec{v}}\, L = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}}.$$

Функция Лагранжа зависит от координат и скоростей (они считаются независимыми переменными) $L = L(\vec{r}, \vec{v})$, поэтому градиент в выражении для обобщенного импульса берется по скорости, а $\vec{r}$ считается константой.

Воспользовавшись (10.2), получим выражение для обобщенного импульса:

$$\vec{\mathcal{P}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{e}{c}\vec{A} = \vec{P} + \frac{e}{c}\vec{A}, \tag{10.3}$$

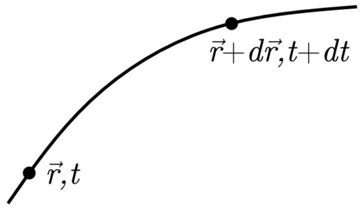

Рис. 10.1

где $\vec{P}$ — кинематический импульс.

Уравнение Лагранжа, отвечающее минимуму действия, примет вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{\mathcal{P}}}{dt} = \vec{\nabla}_{\vec{r}} L, \tag{10.4}$$

где, согласно (10.3):

$$\frac{d\vec{\mathcal{P}}}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt} + \frac{e}{c}\frac{d\vec{A}}{dt};$$

Вектор-потенциал $\vec{A}$ зависит от $\vec{r}$, t (см. рис. 10.1). Тогда полная производная

$$d\vec{A} = \vec{A}(t+dt, \vec{r}+d\vec{r}) - \vec{A}(t, \vec{r}).$$

С учетом того, что $\frac{dx}{dt} = v_x$ (аналогично для y и z компоненты), получим:

$$d\vec{A} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}dt + \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial x}dx + \frac{\partial \vec{A}}{\partial y}dy + \frac{\partial \vec{A}}{\partial z}dz\right) = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}dt + (\vec{v}\,\vec{\nabla})\vec{A}\,dt.$$

В этом случае правая часть уравнения Лагранжа (10.4) примет вид:

$$\frac{d\vec{\mathcal{P}}}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt} + \frac{e}{c}\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v}\,\vec{\nabla})\vec{A}\right). \tag{10.5}$$

Вычислим теперь левую часть уравнения Лагранжа (10.4). Ранее в векторном анализе уже была выведена формула градиента скалярного произведения. Если один из векторов в скалярном произведении считать постоянным, то

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}}(\vec{A}\vec{v}) = \left([\vec{v}, \operatorname{rot}\vec{A}] + (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{A}\right).$$

В этом случае левая часть уравнения Лагранжа примет вид:

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} L = -e\vec{\nabla}\phi + \frac{e}{c}\left([\vec{v}, \operatorname{rot}\vec{A}] + (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{A}\right). \tag{10.6}$$

Видно, что выражение $(\vec{v}\vec{\nabla})\vec{A}$ входит с одинаковым коэффициентом в выражения (10.5) и (10.6). Следовательно, на нее можно сократить, тогда из уравнения Лагранжа получим выражение для произвольного кинематического импульса:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = e\left(-\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) + \frac{e}{c}[\vec{v}, \operatorname{rot}\vec{A}]. \tag{10.7}$$

Введем следующие обозначения:

$$\vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A}, \qquad \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

В этом случае уравнение (10.7) примет вид:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}[\vec{v}, \vec{H}].$$

Если бы $\vec{E}$ было напряженностью электрического поля, а $\vec{H}$ — напряженностью магнитного, то выражение в правой части оказалось бы в точности равно **силе Лоренца**.

Одно только условие, что частица находится в некотором векторном поле и требование, чтобы действие было скаляром приводит, во-первых, к уравнению движения с силой Лоренца, а во-вторых, к **первой паре уравнений Максвелла**:

$$\operatorname{div}\vec{H} = \operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{A} = 0, \qquad \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{A} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t},$$

поскольку $\operatorname{rot}\vec{\nabla}\phi = 0$.

Таким образом, первая пара уравнений Максвелла получена теоретически. Поскольку $\operatorname{div}\vec{H} = 0$, то магнитный заряд для классической частицы согласно принципу наименьшего действия не может быть отличным от нуля.

Принцип наименьшего действия для частицы, движущейся по определенной траектории требует, чтобы отсутствовал магнитный заряд.

Квантовая механика поправляет ситуацию: Дирак показал, что при квантовом движении магнитный заряд, или монополь, может существовать.

Ранее действие для частицы в электромагнитном поле было записано в виде второго слагаемого в уравнении (10.1). Посмотрим, что будет, если к A_i добавить градиент произвольной функции:

$$A_i' = A_i + \frac{\partial f}{\partial x^i}. \tag{10.8}$$

В этом случае добавка к действию будет равна:

$$\frac{e}{c}\int\limits_M^N \frac{\partial f}{\partial x^i}\,dx^i = \frac{e}{c}f\Big|_M^N,$$

где M, N — некоторые точки на траектории.

Таким образом, на линии движения этот добавок дает постоянную величину и, следовательно, не влияет на вариацию между точками M и N: вариацию на концах всегда можно положить равной нулю. Следовательно, добавление (10.8) не изменяет действие.

Следовательно, вектор-потенциал определен с точностью до градиента некой функции. Калибровочная свобода тесно связана с законом сохранения заряда.

Рассмотрим движение некоторой плотности зарядов

$$e\,dx^i = \rho\,d^3x\,\frac{dx^i}{dt}dt = j^i\,d^4x,$$

поскольку $d3x\,dt$ — четырехмерный объем.

Тогда взаимодействие примет вид:

$$S_{вз} = \frac{1}{c} \iiiint d^4x\, A_i j^i.$$

Если в это выражение подставить (10.8), то добавка к действию примет вид:

$$S'_{вз} = \frac{1}{c} \iiiint \frac{\partial f}{\partial x^i} j^i\, d^4x = \frac{1}{c} \iiiint \left(\frac{\partial}{\partial x^i}(f j^i) - f \frac{\partial j^i}{\partial x^i} \right) d^4x.$$

В этом выражении

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(f j^i) \text{ — четырехмерная дивергенция,}$$

которую можно свести к интегрированию по гиперповерхности, окружающей четырехмерный объем (если представить это в плоскости (см. рис. 10.2), то интеграл по заштрихованной поверхности сведется к потоку через стенки).

Если взять бесконечный объем и потребовать, чтобы соответствующая функция падала, то интеграл по поверхности обратится в ноль.

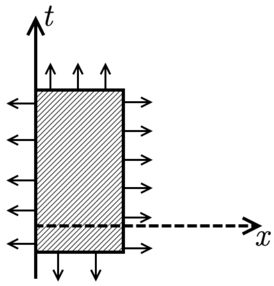

Рис. 10.2

Чтобы вариация действия не изменилась $S'_{вз} = 0$, следовательно:

$$\frac{\partial j^i}{\partial x^i} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0,$$

то есть получили закон сохранения заряда (четырехмерного тока).

Таким образом,, градиентная свобода тесно связана с законом сохранения заряда. Этот факт послужил обобщением и привел к построению современной теории элементарных частиц: удалось объединить электромагнитное и слабое взаимодействие. Также удалось построит сильное взаимодействие (взаимодействие кварков между собой), то есть квантовую хромодинамику.

Существует следующий принцип: сохраняющиеся заряды и их токи обязательно должны быть источниками калибровочных (то есть определенных с точностью до производных) полей.

Для того, чтобы получить вторую пару уравнений Максвелла, примем следующее положение: поле (электромагнитное, гравитационное, сильное) можно рассматривать как механическую систему с бесконечным (континуальным) числом степеней свободы.

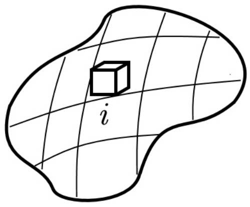

Рис. 10.3

Возьмем некоторую область (см. рис. 10.3) и разобьем ее на кубики. Пусть есть некоторое поле $\phi(\vec{r}, t)$. Возьмем внутри i-ого кубика значение ϕ в точке $\vec{r}_i$ в момент времени t $\phi(\vec{r}, t)$ и будем считать, что это есть обобщенная координата:

$$q_i(t) = \phi(\vec{r}_i, t),$$

а производная

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \dot{q}_i.$$

Тогда значение поля в некоторой малой окрестности может считать обобщенной координатой, а изменение поля со временем — обобщенной скоростью. Тогда для этой переменной должна существовать некая функция Лагранжа

$$\mathcal{L}_i = \left(\phi(\vec{r}_i, t), \frac{\partial \phi}{\partial t}, \ldots \right),$$

а для всех точек

$$\mathcal{L} = \sum_i \mathcal{L}_i \left(\phi(\vec{r}_i, t), \frac{\partial \phi}{\partial t}, \ldots \right).$$

Вместо троеточия в это выражение могут войти такие члены, как $\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z}$, так как при рассмотрении малого объема координата может зависеть от соседних. С точки зрения теории относительности, производная по времени и по координате должны входить в это выражение равноправно.

Если устремить к нулю размеры малого объема, то сумма по всем $\mathcal{L}_i$ сведется к тройному интегралу:

$$\mathcal{L} = \iiint \mathcal{L} \left(\phi(\vec{r}, t), \frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial \phi}{\partial x^\beta}, \frac{\partial \phi}{\partial x^\gamma} \right) d^3 x.$$

По определению, действие это

$$S = \int \mathcal{L}\, dt = \iiiint \mathcal{L}\, d^4 x.$$

Ранее было доказано, что $d^4 x$ — инвариант. Действие должно быть инвариантом, следовательно, функция Лагранжа $\mathcal{L}$ также должна быть релятивистским инвариантом. Если полей несколько, то функция Лагранжа будет зависеть от каждого из этих полей.

Если существует 4-вектор, значит существует 4-поле: скалярный потенциал и три компоненты поля, отвечающие векторному потенциалу. Из одного требования, чтобы функция Лагранжа была релятивистским скаляром можно получить вторую пару уравнений Максвелла, хотя, казалось бы, о взаимодействии ничего не известно.

Аналогично поступают не только с электромагнитным, но и с любыми другими типами полей: заряды создают калибровочные поля, калибровочную неопределенность устраняют с помощью неких комбинаций, из которых строят функцию Лагранжа, которая, в свою очередь, должна быть инвариантной.

Из векторного поля можно построить, например, тензор $\mathfrak{F}_{ik}$, являющийся инвариантом:

$$\mathfrak{F}_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}. \tag{10.9}$$

Ранее было показано, что в этом тензоре произвольных составляющих не будет: перекрестные производные от произвольной части сокращаются, то есть $\mathfrak{F}_{ik}$ не зависит от произвола калибровки.

Можно также построить контравариантный тензор $\mathfrak{F}^{ik}$ и дуальный тензор $\tilde{F}^{ik}$. Ранее было получено, что первая пара уравнений Максвелла может быть с помощью дуального тензора записана в виде:

$$\frac{\partial \tilde{\mathfrak{F}}^{ik}}{\partial x^k} = 0.$$

Из тензоров можно построить величины, которые будут релятивистскими скалярами: инварианты поля, о которых уже говорили на позапрошлой лекции.

Таким образом, функцию Лагранжа можно записать в виде:

$$\mathcal{L} = c_1 \mathfrak{F}^{ik} \mathfrak{F}_{ik} + c_2 \tilde{\mathfrak{F}}^{ik} \mathfrak{F}_{ik}, \tag{10.10}$$

где $I_1 = \mathfrak{F}^{ik} \mathfrak{F}_{ik}$ — первый инвариант поля;

$I_2 = \tilde{\mathfrak{F}}^{ik} \mathfrak{F}_{ik}$ — второй инвариант поля.

Можно было бы также построить, например, квадратичные члены $c_3(\mathfrak{F}^{ik} \mathfrak{F}_{ik})^2$, члены более высоких порядков или произведения инвариантов. Не будем этого делать, поскольку при варьировании по обобщенным координатам, то есть по полям, хотелось бы получить линейные уравнения.

Таким образом, сможем получить вторую пару уравнений Максвелла. Изучая квантовые поправки к уравнениям Максвелла, сможем получить коэффициенты при нелинейных слагаемых, например, коэффициент c_3. Эти поправки будут описывать эффекты, которые в классической теории не рассматриваются, например, рассеяние света на свете. Квантовая механика позволяет вычислить коэффициенты при этих более высоких степенях.

Рассмотрим подробнее коэффициент c_1. Ранее было получено, что

$$\mathfrak{F}^{ik} \mathfrak{F}_{ik} = 2(\vec{H}^2 - \vec{E}^2).$$

Поскольку

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \vec{E}^2 \sim \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)^2.$$

Это положительная величина, поэтому, если бы $c_1 > 0$, то минимум действия достигался бы, когда

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \to \infty.$$

В этом случае $\mathcal{L} \to -\infty$, то есть статического решения не было бы. Следовательно, $c_1 < 0$.

Найдем размерность коэффициента c_1. Функция действия имеет размерность энергии, умноженной на время, а функция Лагранжа — размерность энергии, следовательно, согласно (10.2):

$$[S] = [\varepsilon][t] \quad \Rightarrow \quad [e][A] = [\varepsilon]. \tag{10.11}$$

В соответствии с определением тензора (10.9), его размерность

$$[\mathfrak{F}_{ik}] = \frac{[A]}{[L]} \quad \Rightarrow \quad [\mathfrak{F}^{ik} F_{ik}] = \frac{[A^2]}{[L^2]}.$$

Интегрируя по всему объему, получим:

$$\frac{[A^2]}{[L^2]}[L^3] = [A^2][L] = [\varepsilon] \tag{10.12}$$

Хочется выбрать единицы так, чтобы c_1 было безразмерным. Следовательно, нужно соответствующим образом выбрать размерность заряда. Поделив (10.11) на выражение (10.12), получим:

$$\frac{[e]}{[A][L]} = [1] \quad \Rightarrow \quad [A] = \frac{[e]}{[L]}.$$

Так как одна из компонент 4-вектора $\vec{A}$ — потенциал ϕ, то

$$[\phi] = \frac{[e]}{[L]},$$

и, поскольку $\varepsilon \sim \phi \cdot e$, то

$$\frac{[e^2]}{[L]} = [\varepsilon] \quad \Rightarrow \quad [e] = \sqrt{[\varepsilon][L]}.$$

Если выбрать размерность заряда таким образом, то коэффициент c_1 окажется безразмерным. Однако эту величину можно умножить или разделить на какое-то число.

Вместо выбора, когда коэффициент $1/4\pi$ присутствует во всех уравнениях Максвелла

$$\frac{e^2}{r^2} = F, \qquad c_1 = -\frac{1}{16\pi},$$

можно было бы выбрать заряд в хэвисайдовых единицах:

$$\frac{e_x^2}{4\pi r^2} = F, \qquad c_1 = -\frac{1}{4}.$$

В этом случае, в уравнениях Максвелла всюду исчезнет коэффициент $1/4\pi$, а заряд будет в хевисайдовых единицах.

Действие для частицы будет состоять из трех компонент:

$$S = S_{част} + S_{вз} + S_{поля},$$

где $S_{част}$ — действие для свободной частицы;

$S_{вз}$ — действие, отвечающее взаимодействию;
$S_{поля}$ — действие для поля.

Функцию Лагранжа для поля запишем в виде (10.10). Вариация δS поля будет происходить по обобщенным координатам, то есть по полям в некоторой точке.

Пусть есть поле в некоторой точке ϕ, тогда соответствующая вариация будет равна $\phi + \delta\phi$. Вариация действия сведется к интегралу от вариации функции Лагранжа. Рассмотрим сначала вариацию второго слагаемого в (10.10).

$$\tilde{\mathfrak{F}}^{ik}\mathfrak{F}_{ik} = \tilde{\mathfrak{F}}^{ik}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\right).$$

При перестановке $i \leftrightarrow k$ выражение в скобке меняет знак, но и дуальный тензор также меняет знак, следовательно, это выражение можно записать следующим образом:

$$\tilde{\mathfrak{F}}^{ik}\mathfrak{F}_{ik} = -2\tilde{\mathfrak{F}}^{ik}\frac{\partial A_i}{\partial x^k}.$$

Найдем вариацию этого выражения $\delta(\tilde{\mathfrak{F}}^{ik}\mathfrak{F}_{ik})$.

Поскольку A_i входит в выражение для $\tilde{\mathfrak{F}}^{ik}$, и, так как тензоры в произведении можно записать в обратном порядке, вариация будет в два раза больше:

$$\delta(\tilde{\mathfrak{F}}^{ik}\mathfrak{F}_{ik}) = -4\tilde{\mathfrak{F}}^{ik}\delta\left(\frac{\partial A_i}{\partial x^k}\right).$$

В курсе теоретической механики была доказана теорема о том, что вариация производной равна производной от вариации, поэтому

$$\delta\left(\frac{\partial A_i}{\partial x^k}\right) = \frac{\partial}{\partial x^k}(\delta A_i).$$

С учетом этого выражение для вариации примет вид:

$$\delta(\tilde{\mathfrak{F}}^{ik}\mathfrak{F}_{ik}) = -4\left\{\frac{\partial}{\partial x^k}(\tilde{\mathfrak{F}}^{ik}\delta A_i) - \delta A_i\frac{\partial\tilde{\mathfrak{F}}^{ik}}{\partial x^k}\right\}. \tag{10.13}$$

В этом выражении, во-первых,

$$\frac{\partial\tilde{\mathfrak{F}}^{ik}}{\partial x^k} = 0,$$

поскольку это в точности выражение для первой пары уравнений Максвелла.

Первый член в выражении (10.13) есть четырехмерная дивергенция некоторого вектора, интеграл от которой сводится к интегрированию потока вектора по гиперповерхности, окружающей четырехмерный объем, и, следовательно, как было доказано ранее, равняется нулю.

Таким образом, вариация второго слагаемого в уравнении (10.10) также равна нулю, следовательно, в линейном приближении этот член не участвует.

Это хорошо, поскольку это слагаемое является псевдоскаляром, и, если бы вариация второго слагаемого (10.10) оказалась не равной нулю, то отсутствовала бы зеркальная симметрия.

Проведя аналогичные операции с первым членом выражения (10.10), получим:

$$\delta(\mathfrak{F}^{ik}\mathfrak{F}_{ik}) = 4\frac{\partial \mathfrak{F}^{ik}}{\partial x^k}\delta A_i.$$

Поскольку в член с взаимодействием также входит A_i, то его вариация будет равна

$$\delta S_{вз} = -\frac{1}{c}\iiiint \delta A_i j^i \, d^4x.$$

Тогда вариация действия при $c_1 = -\frac{1}{16}\pi$ примет вид:

$$\delta S = -\frac{1}{c}\iiiint j^i \delta A_i \, d^4x - \frac{1}{4\pi}\iiiint \frac{\partial \mathfrak{F}^{ik}}{\partial x^k}\delta A_i \, d^4x. \tag{10.14}$$

Если нужно найти экстремум функции действия, то сумма коэффициентов при δA_i должна быть равна нулю. Тогда получим:

$$\frac{\partial \mathfrak{F}^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c}j^i. \tag{10.15}$$

Выражение (10.15) в точности представляет собой вторую пару уравнений Максвелла.

Итак, законы электромагнитного поля были получены всего из **двух предположений**:

1. Принципа наименьшего действия;

2. Предположения о том, что частица находится в некотором векторном поле и требования линейности лагранжиана.

Действие, отвечающее взаимодействию, не меняется при калибровочных преобразованиях, поэтому вектор-потенциал определен с точностью до калибровочных преобразований.

Ничего не изменится, если отказаться от калибровочных преобразований. Предположим, что существует **еще один инвариант**:

$$I_3 = \frac{\lambda^2}{8\pi}A^i A_i.$$

Тогда действие, отвечающее этому инварианту, примет вид:

$$S_3' = \iiiint I_3 \, d^4x,$$

и, следовательно к вариации действия (10.14) добавится еще один член:

$$\delta S = \dots + \frac{\lambda^2}{4\pi}\iiiint A^i \delta A_i \, d^4x.$$

Тогда выражения для второй пары уравнений Максвелла примет вид:

$$\frac{\partial \mathfrak{F}^{ik}}{\partial x^k} - \lambda^2 A^i = -\frac{4\pi}{c}j^i. \tag{10.16}$$

Какой физический смысл приобретет величина λ? Формально, не нарушая Лоренц-инвариантности и того факта, что действие является скаляром, всегда можно взять $I_3 = A^2$. Продифференцировав (10.16) по x^i, получим

$$\frac{\partial \mathfrak{F}^{ik}}{\partial x^i \partial x^k} - \lambda^2 \frac{\partial A^i}{\partial x^i} = -\frac{4\pi}{c}\frac{\partial j^i}{\partial x^i}. \tag{10.17}$$

При перестановке $i \leftrightarrow k$ $\mathfrak{F}^{ik}$ меняет знак, а выражение остается суть тем же самым, поэтому

$$\frac{\partial \mathfrak{F}^{ik}}{\partial x^i \partial x^k} = 0.$$

Согласно закону сохранения заряда:

$$\frac{\partial j^i}{\partial x^i} = 0.$$

Следовательно, выражение (10.17) примет вид:

$$\lambda^2 \frac{\partial A^i}{\partial x^i} = 0, \quad \text{если } \lambda^2 \neq 0, \text{ то } \frac{\partial A^i}{\partial x^i} = 0.$$

Это есть не что иное, как условие Лоренца, которое было выведено ранее.

Опустим теперь в (10.16) все индексы вниз, тогда

$$\frac{\partial \mathfrak{F}_{ik}}{\partial x_k} - \lambda^2 A_i = -\frac{4\pi}{c} j_i.$$

Учитывая условие Лоренца, получим, что

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(\mathfrak{F}_{ik}) = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\right) = 0,$$

а так как

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x^k} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = -\Box.$$

Следовательно, получим следующее выражение:

$$\Box A_i - \lambda^2 A_i = -\frac{4\pi}{c} j_i.$$

Можно теперь поднять индексы вверх, тогда получим:

$$\Box A^i - \lambda^2 A^i = -\frac{4\pi}{c} j^i. \tag{10.18}$$

Чтобы понять смысл величины λ, которая была введена в нарушение калибровочной свободы, рассмотрим решение этого уравнения для пустого пространства, когда $j^i = 0$. Тогда для нулевой компоненты получим:

$$\Box\phi - \lambda^2\phi = 0.$$

Решение будем искать в виде $\phi = c\exp\left\{(-i\omega t + i\vec{k}\vec{r})\right\}$. Подставляя это решение в выражение для нулевой компоненты, получим:

$$\left(-k^2 + \frac{1}{c^2}\omega^2 - \lambda^2\right) ce^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}} = 0$$

Решение в виде волны будет удовлетворяться, если

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 + \lambda^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = c\sqrt{k^2 + \lambda^2}. \tag{10.19}$$

Эта формула напоминает формулу для энергии релятивистской частицы, выраженной через импульс:

$$\varepsilon = c\sqrt{\vec{p}^2 + m^2c^2}.$$

В квантовой механике $\varepsilon = \hbar\omega$, $\vec{p} = \hbar k$. Умножив выражение (10.19) на $\hbar$, получим:

$$\hbar\omega = c\sqrt{\hbar^2 k^2 + \lambda^2\hbar^2} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = c\sqrt{\vec{p}^2 + \lambda^2\hbar^2}.$$

Получается, что для частицы, которая отвечала бы электромагнитной волне,

$$\lambda^2\hbar^2 = m_{\text{ф}}^2 c^2,$$

где $m_{\text{ф}}$ — масса фотона.

В этом случае

$$m_{\text{ф}} = \frac{\lambda\hbar}{c} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{m_{\text{ф}} c}{\hbar},$$

то есть инвариант I_3 отвечает тому, что электромагнитной волне соответствует частица с ненулевой массой.

Из опыта известно, что электромагнитной волне не отвечает частица с ненулевой массой: на разных длинах волн скорость света одинакова. Однако опыт всегда дает ограниченный в некоторой области результат.

Оказывается, если рассмотреть то же самое уравнение для статического поля, получим:

$$(\Delta - \lambda^2)\phi = 4\pi\rho.$$

Для точечного заряда отклонение от закона Кулона имеет вид:

$$\phi = \frac{q}{r}e^{-\lambda r}.$$

Такое же экспоненциальное отклонение получим и для магнитного поля.

Шредингер в свое время предложил опыт, который удалось осуществить, когда наступила космическая эра. Он предложил измерять магнитное поле Юпитера. Оказалось, что на расстоянии порядка 10^5 км никакого отличия не обнаружено.

$$\frac{1}{\lambda} > 10^{10}\tfrac{1}{\text{см}}.$$

Массу фотона удобно сравнивать с массой электрона:

$$\frac{\hbar}{m_e c} \simeq 4\cdot 10^{-11} \text{ см}, \qquad \frac{\hbar}{m_{\text{ф}} c} > 10^{10} \text{ см},$$

следовательно, отношение массы фотона к массе электрона

$$\frac{m_{ф}}{m_e} \approx 10^{-21} \div 10^{-22}.$$

Таким образом, теоретически фотон с массой $10^{-22} m_e$ мог бы существовать. Если бы мы захотели узнать, на каких длинах волн начинается дисперсия, то длина волны оказалась бы порядка 100000 км.

В дальнейшем, из-за нехватки времени, электростатика на лекциях рассмотрена не будет. Сформулируем лишь некоторые основные вещи, которые надо знать:

1. Разложение по мультиполям;
2. Дипольный момент $\vec{d} = \sum_a e_a \vec{r}_a$, независимость его от выбора системы координат, если суммарный заряд равен нулю;
3. Поле диполя
$$\vec{E} = \frac{3(\vec{d}\vec{n})\vec{n} - \vec{d}}{r^3};$$
4. Энергия диполя во внешнем поле, взаимодействие двух диполей $U = -\vec{d}\vec{E}$;
5. Квадруполь Q_{ik}, квадрупольные моменты осесимметричного тела — в этом случае квадрупольный момент описывается одной константой. Зная ее, можно определить квадрупольный момент. Измеряя рассеяние ядер на ядрах, удалось обнаружить квадрупольный момент у ядер в середине таблицы Менделеева и доказать, что эти ядра имеют не сферическую, а вытянутую форму. Квадрупольное взаимодействие важно при изучении твердого тела.