ЛЕКЦИЯ 12

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

1. Движение заряженной частицы в неоднородном магнитном поле

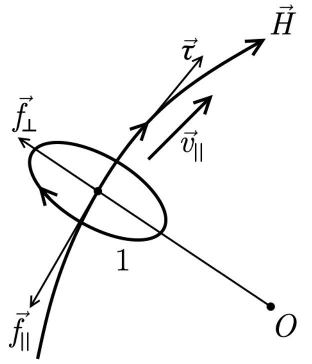


Рис. 12.1

Рассмотрим силы, действующие на ведущий центр орбиты частицы. Пусть существует некоторая силовая линия магнитного поля $\vec{H}$ (см. рис. 12.1).

Заряженная частица будет вращаться вокруг этой силовой линии и также может обладать скоростью $\vec{v}_\parallel$, направленной перпендикулярно плоскости вращения.

Рассмотрим вначале движение, при котором у частицы есть только перпендикулярная силовой линии составляющая скорости. В неоднородном поле на ведущий центр орбиты будет действовать сила, которая будет вызывать определенное движение кольца (1).

Движущаяся по окружности частица обладает магнитным моментом. На прошлой лекции было получено, что сила, действующая на частицу в этом случае, определяется следующим образом:

$$\vec{F} = (\vec{\mu}\vec{\nabla})\vec{H}, \tag{12.1}$$

то есть сила есть производная по направлению $\vec{\mu}$ от $\vec{H}$.

Магнитное поле можно записать в виде:

$$\vec{H} = |\vec{H}|\vec{\tau},$$

где $\vec{\tau}$ — единичный вектор, направленный вдоль касательной к магнитному полю.

Магнитный момент определяется следующим соотношением:

$$\vec{\mu} = \frac{e}{2c}[\vec{r}, \vec{v}] = -\frac{e}{2c} r v \vec{\tau}, \tag{12.2}$$

где r — радиус орбиты. Легко видеть, что векторное произведение $\vec{r}$ и $\vec{v}$ направлено против $\vec{\tau}$, поэтому в (12.2) появляется знак минус.

На прошлой лекции было получено выражение для радиуса орбиты:

$$r = \frac{cp_\perp}{eH}.$$

Подставляя это выражение в (12.2), получим выражение для магнитного момента:

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{2c}\frac{cp_\perp}{eH} v_\perp \vec{\tau} = -\frac{p_\perp v_\perp}{2H}\vec{\tau}.$$

Подставляя получившееся выражение в (12.1), получим выражение для силы:

$$\vec{F} = -\frac{p_\perp v_\perp}{2H}(\vec{\tau}\vec{\nabla})|\vec{H}|\vec{\tau}. \tag{12.3}$$

Производную по направлению нужно брать как производную сложной функции: отдельно дифференцировать по $|\vec{H}|$, отдельно по $\vec{\tau}$. Так как поле неоднородно, вектор $\vec{\tau}$ может менять направление.

В этом случае выражение (12.3) принимает следующий вид:

$$\vec{F} = -\vec{\tau}\frac{p_\perp v_\perp}{2H}(\vec{\tau}\vec{\nabla}|\vec{H}|) - \frac{p_\perp v_\perp}{2}(\vec{\tau}\vec{\nabla})\vec{\tau}.$$

Очевидно, что сила разбилась на две составляющие: параллельную и перпендикулярную направлению магнитного поля

$$\vec{F} = \vec{f}_\parallel + \vec{f}'_\perp, \qquad \vec{f}_\parallel = -\vec{\tau}\frac{p_\perp v_\perp}{2H}(\vec{\tau}\vec{\nabla}|\vec{H}|), \qquad \vec{f}'_\perp = -\frac{p_\perp v_\perp}{2}(\vec{\tau}\vec{\nabla})\vec{\tau},$$

причем параллельная составляющая силы направлена по силовой линии против возрастания магнитного поля.

На прошлой лекции в разделе, посвященном адиабатическому инварианту, было показано, что возможно существование магнитного зеркала: тормозящая сила $\vec{f}_\parallel$, направленная против направления возрастания магнитного поля, и есть основа существования магнитного зеркала.

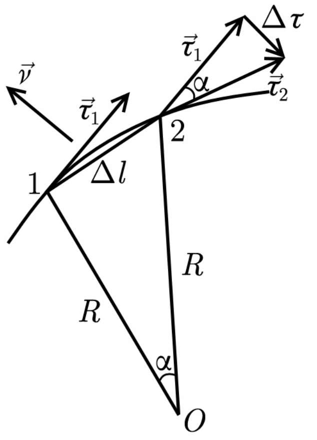
Найдем значение силы $\vec{f}'_\perp$. Для этого рассмотрим вектор $\vec{\tau}$ в разные моменты времени (1) и (2) (см. рис. 12.2).

Легко видеть, что $\angle\alpha = \angle O$, где точка O — центр кривизны, поэтому расстояние Δl определяется из соотношения:

$$\Delta l = R\alpha.$$

Введем единичный вектор $\vec{\nu}$, направленный перпендикулярно силовой линии, тогда, поскольку $\vec{\tau}$ — единичный вектор:

$$\Delta\vec{\tau} = \alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta l} = -\frac{\vec{\nu}}{R}.$$



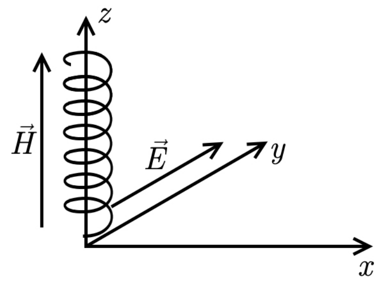


Рис. 12.3

В этом случае выражение для $\vec{f}'_\perp$ примет вид:

$$\vec{f}'_\perp = \frac{p_\perp v_\perp}{2R}\vec{\nu}.$$

Таким образом, вдоль силовой линии действует сила $\vec{f}_\parallel$, осуществляющая выталкивание из сильного поля. Перпендикулярно силовой линии действует сила $\vec{f}'_\perp$, найденная при $\vec{v}_\parallel = 0$, и центробежная сила по отношению к радиусу кривизны, если $\vec{v}_\parallel \neq 0$.

При учете движения вдоль силовой линии суммарная сила в направлении, перпендикулярном силовой линии, примет следующий вид:

$$\vec{f}_\perp = \left(\frac{p_\perp v_\perp}{2R} + \frac{p_\parallel v_\parallel}{R}\right)\vec{\nu}.$$

Пример 19 Ранее на лекциях был рассмотрен следующий пример (см. рис. 12.3): пусть на частицу действует электрическое $\vec{E}$ и магнитное $\vec{H}$ поле, причем поле $\vec{H}$ направлено вдоль оси z, а поле $\vec{E}$ — вдоль оси y.

Тогда, если $|\vec{E}| < |\vec{H}|$, то частица будет двигаться по винтовой линии вдоль оси z и с постоянной скоростью дрейфа вдоль оси x, причем

$$v_d = \frac{[\vec{E}, \vec{H}]}{H^2}c.$$

Перпендикулярную силу $\vec{f}_\perp$ можно представить как напряженность электрического поля. Тогда напряженность этого фиктивного электрического поля принимает вид:

$$\vec{E}_\perp = \frac{\vec{f}_\perp}{e},$$

где e — заряд частицы.

Стало быть, кроме движения вдоль силовой линии будет существовать движение, перпендикулярное силовой линии. $*$

Это явление вызывает в радиационных поясах следующий геофизический эффект (см. рис. 12.4).

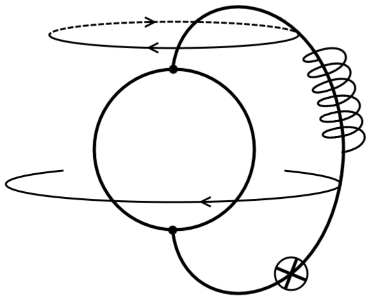


Рис. 12.4

Пример 20 В радиационных поясах (поясах Ван Аллена) частицы не только двигаются вдоль силовой линии магнитного поля, но и вращаются вокруг линии, соединяющей полюса, либо с востока на запад, либо с запада на восток в зависимости от знака заряда.

Движение вдоль силовой линии в этом случае определяется $\vec{f}_{\parallel}$, в то время как сила $\vec{f}_{\perp}$ вызывает вращение вокруг Земной оси.

В США был проведен следующий опыт: в южном полушарии был осуществлен взрыв атомной бомбы, что привело к возникновению полярного сияния вблизи северного полюса.

Тем самым было доказано, что продукты ядерного взрыва (заряженные ионы), во-первых, образуют радиационные пояса, а во-вторых — распространяются на всю поверхность Земли. $*$

Силу $\vec{f}_{\perp}$ приходится устранять в установках, направленных на создание управляемого термоядерного синтеза.

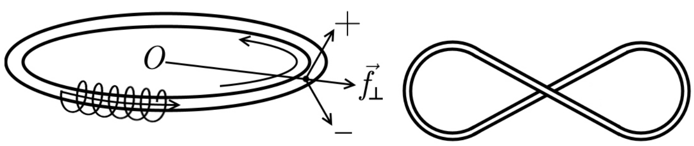


Рис. 12.5

Пример 21 В таких установках (токамаках), с помощью катушек создается направленное магнитное поле (см. рис. 12.5), которое своим давлением удерживает плазму от соприкосновения со стенками токамака.

Температура плазмы достигает 10^8 K, поэтому попадание ее на стенки установки недопустимо. Силовые линии магнитного поля имеют определенную кривизну, поэтому сила $\vec{f}_{\perp}$ будет отлична от нуля.

В этом случае положительно заряженные частицы в любой точке токамака будут двигаться к верхней части тора, а отрицательно заряженные — к нижней его части.

Это приведет к нестабильности плазмы. В настоящее время существует способ устранения этого негативного влияния $\vec{f}_\perp$.

До того, как этот способ был придуман, существовал проект токамака с вакуумной камерой в виде «восьмерки» (см. рис. 12.5), в которой на противоположных участках частицы одного заряда направлены в разные стороны, что приводит к компенсации $\vec{f}_\perp$.*

2. Полевая теория массы

Рассмотрим идею о полевом происхождении массы. Пусть в некотром пространстве есть проводники, в которых с некоторой плотностью ρ распределены заряды (см. рис. 12.6).

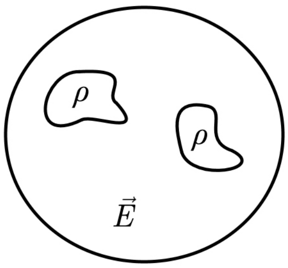


Рис. 12.6

Комбинация зарядов создает в каждой точке пространства электрическое поле $\vec{E}$.

Полная энергия в этом случае имеет вид:

$$\mathcal{E} = \iiint \frac{\vec{E}^2}{8\pi}\,dV, \tag{12.4}$$

где $\vec{E}^2/8\pi$ — плотность энергии электростатического поля.

Квадрат напряженности электрического поля можно записать следующим образом:

$$\vec{E}^2 = -\vec{E}\vec{\nabla}\phi = -\operatorname{div}(\vec{E}\phi) + \phi \operatorname{div}\vec{E}. \tag{12.5}$$

Согласно уравнениям Максвелла,

$$\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho,$$

поэтому выражение (12.5) примет вид

$$\vec{E}^2 = -\operatorname{div}(\vec{E}\phi) + \phi \cdot 4\pi\rho.$$

При подстановке этого выражения в (12.4) интеграл по объему от дивергенции сведется к поверхностному интегралу по бесконечно удаленной поверхности.

$$|\vec{E}| \sim \frac{1}{r^2}, \qquad |\phi| \sim \frac{1}{r},$$

а площадь поверхности пропорциональна r^2, следовательно, поверхностный интеграл по бесконечно удаленной поверхности обратится в ноль.

Следовательно, энергия поля примет следующий вид:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \iiint \rho\phi\, d^3x, \tag{12.6}$$

где интеграл берется по области, где есть ненулевая плотность зарядов.

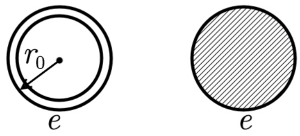


Рис. 12.7

Рассмотрим шар, у которого заряд e распределен по поверхности (см. рис. 12.7). В этом случае

$$\phi = \frac{e}{r_0}, \qquad \rho\, d^3x = e,$$

где r_0 — радиус шара.

Следовательно, согласно (12.6),

$$\mathcal{E} = \frac{e^2}{2r_0}.$$

Если теперь рассмотреть шар, в котором заряд распределен равномерно по объему, то энергия окажется равной

$$\mathcal{E} = \frac{3}{5}\frac{e^2}{r_0}. \tag{12.7}$$

В любом случае энергия зависит только от заряда и радиуса, поэтому можем записать ее в следующем виде:

$$\mathcal{E} = f\frac{e^2}{r_0}, \tag{12.8}$$

где f — некоторый коэффициент.

Формула (12.7) применяется к атомному ядру. Если в модели ядра учесть отталкивание протонов, то дополнительная энергия прибавляется к (12.7).

Это приводит к тому, что масса тяжелых ядер становится больше, чем сумма масс их составляющих, в результате чего происходит α-распад или спонтанное деление ядер.

Заряд ядра

$$q = Z \cdot e,$$

а радиус ядра пропорционален атомному номеру в степени $-1/3$, поэтому энергия ядра

$$\mathcal{E} \sim \frac{(Ze)^2}{A^{1/3}}.$$

Попробуем применить (12.8) для электрона: будем считать, что электрон является шаром.

Если электрон покоится, то его энергия покоя равна mc^2. Будем считать, что эта энергия имеет электростатическую природу.

Тогда, положив в (12.8) $f = 1$, получим:

$$mc^2 = \frac{e^2}{r_0} \quad \Rightarrow \quad r_0 = \frac{e^2}{mc^2}. \tag{12.9}$$

Величина r_0 — **классический радиус электрона**. Для электрона

$$e \simeq 4{,}8 \cdot 10^{10}\ \text{CGSE}, \qquad m \simeq 0{,}9 \cdot 10^{-27}\ \text{гр.} \quad \Rightarrow \quad r_0 \simeq 3 \cdot 10^{-13}\ \text{см.}$$

Опыты, которые проводятся в настоящее время, показывают, что радиус электрона, по крайней мере, меньше 10^{-16} см:

$$r < 10^{-16}\ \text{см.}$$

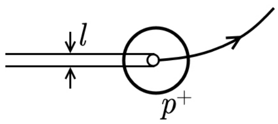


Рис. 12.8

Рассмотрим один из способов измерения радиуса частиц. Радиус протона впервые был измерен следующим образом (см. рис. 12.8).

На протоне рассеивали различные частицы. Если прицельное расстояние некоторого распределения l оказывается меньше радиуса, это значит, что на частицы в этом распределении действует, очевидно, не весь заряд, а лишь некоторая его часть.

Это позволило определить распределение зарядов в протоне. Радиус протона оказался порядка $10^{-13} - 10^{-14}$ см.

При столкновении электронов с электронами (или с позитронами) эффекта, подобного эффекту с протонами, не наблюдается, по крайней мере, до расстояния порядка 10^{-16} см.

Таким образом, идея приписать возникновение массы электростатической энергии оказывается неверной.

Вместе с тем оказывается, что на малых расстояниях электростатическая теория оказывается неверной: если в (12.9) подставить радиус порядка 10^{-16} см, то масса частицы окажется очень большой по сравнению с массой электрона.

На самом деле опыты показывают, что классическая электродинамика оказывается неверной уже на расстояниях порядка $4 \cdot 10^{-11}$ см.

Как же теория, не работающая на малых расстояниях, может работать на больших? Оказывается, тот факт, что теория неприменима на малых расстояниях никак не влияет на ее применимость на больших.

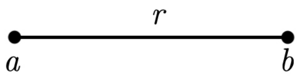


Рис. 12.9

Рассмотрим два заряда a и b, расположенные друг от друга на расстоянии, значительно большем радиуса заряда (см. рис. 12.9), то есть

$$r \gg r_a, \qquad r \gg r_b,$$

где r_a, r_b — радиусы зарядов a и b соответственно.

Энергия взаимодействия этих зарядов определяется следующим соотношением:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}(e_a\phi_a(a) + e_a\phi_b(a)) + \frac{1}{2}(e_b\phi_b(b) + e_b\phi_a(b)), \tag{12.10}$$

где, например, $\phi_a(b)$ — потенциал, который создает заряд a в точке b.

$$\phi_b(a) = \frac{e_b}{r}, \qquad \phi_a(b) = \frac{e_a}{r},$$

а $e_a\phi_a(a), e_b\phi_b(b)$ — собственные энергии зарядов a и b соответственно, это постоянные величины.

Поэтому выражение для энергии (12.10) примет вид:

$$\mathcal{E} = \text{const} + \frac{e_a e_b}{2r} + \frac{e_b e_a}{2r} = \text{const} + \frac{e_a e_b}{r},$$

то есть уже привычное классическое выражение, в котором константа связана с собственной энергией частиц.

Идея о том, что энергия частицы определяется ее собственным электрическим полем (12.9) неверна, идея о полевом происхождении массы — верная идея.

По современным представлениям масса частицы возникает из-за того, что существует некое поле (**хиггсовское поле**), в результате взаимодействия с которым возникает собственная энергия покоящегося заряда.

На основе этой идеи были объяснены массы промежуточных бозонов, которые переносят слабое взаимодействие.

Существует предположение, что электроны и многие другие частицы имеют массу из-за взаимодействия с хиггсовским полем.

3. Электромагнитное поле в вакууме

Пусть в вакууме отсутствуют заряды и токи: $\rho = 0$ и $\vec{j} = 0$. Тогда уравнения для векторного и скалярного потенциалов примут следующий вид:

$$\begin{cases} \Box\phi = 0, \\ \Box\vec{A} = 0. \end{cases} \tag{12.11}$$

При этом должно выполняться условие Лоренца:

$$\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0, \tag{12.12}$$

а выражение для напряженности электрического и магнитного полей имеют вид:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \qquad \vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A}. \tag{12.13}$$

В случае электромагнитного поля в вакууме скалярный потенциал ϕ можно принять равным нулю. Докажем это.

При соблюдении условия Лоренца (12.12) можно использовать калибровочные преобразования:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} f_0, \qquad \phi' = \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial f_0}{\partial t}.$$

Подставляя эти выражения в условие Лоренца (12.12), найдем вид функции f_0:

$$\operatorname{div}\vec{A} + \operatorname{div}\vec{\nabla} f_0 + \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f_0}{\partial t^2} = 0.$$

Поскольку дивергенция градиента некоторой функции равна лапласиану этой функции, чтобы это соотношение выполнялось необходимо, чтобы

$$\Delta f_0 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f_0}{\partial t^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Box f_0 = 0.$$

Таким образом, если провести градиентные преобразования с функцией f_0, удовлетворяющей условию Д'Аламбера, то условие Лоренца не изменяется.

Согласно (12.11) скалярный потенциал ϕ удовлетворяет условию Д'Аламбера. Таким образом, если положить функцию f_0 такую, что

$$\phi = -\frac{1}{c}\frac{\partial f_0}{\partial t},$$

то при таком преобразовании $\phi' = 0$.

Таким образом, с помощью калибровочных преобразований всегда можно обнулить скалярный потенциал.

Чтобы проследить за тем, какого типа решения возможны, обозначим через ψ какую-либо компоненту вектор-потенциала $\vec{A}$.

Рассмотрим случай одного пространственного измерения, когда $\psi = \psi(x,t)$. Тогда уравнение (12.11) примет вид:

$$\Box\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \tag{12.14}$$

Введем следующие переменные

$$\begin{cases} \xi = x - ct, \\ \eta = x + ct. \end{cases}$$

В этом случае

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} = -c\frac{\partial \psi}{\partial \xi} + c\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{c}\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta}.$$

Подставляя эти выражения в (12.14), получим:

$$\Box\psi = 4\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \tag{12.15}$$

Интегрируя выражение (12.15) по η, получим:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi} = f(\xi).$$

Интегрируя это выражение, получим общее решение (12.14):

$$\psi = f_1(\xi) + f_2(\eta), \tag{12.16}$$

где $f_1(\xi)$ — первообразная функции $f(\xi)$.

Это решение было получено при следующих предположениях:

1. Заряды и токи отсутствуют;

2. Рассматривается одномерный случай.

Рассмотрим физический смысл функций f_1 и f_2. Функция $f_1(\xi)$ постоянна, когда $\xi = \xi_0 = \mathrm{const}$:

$$\xi_0 = \mathrm{const} = x - ct \quad \Rightarrow \quad x = \xi_0 + ct.$$

Таким образом, постоянное значение f_1 распространяется с положительной скоростью c от некоторого начального постоянного значения. Аналогично для функции f_2 можно показать, что постоянное значение перемещается с отрицательной скоростью $-c$.

Таким образом, решение (12.16) в общем виде — сумма двух волн, распространяющихся в разных направлениях.

Рассмотрим подробнее волну $f_1(\xi)$, распространяющуюся в положительном направлении. Тогда в случае одного пространственного измерения

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial A_x}{\partial x} = 0.$$

В этом случае

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial A_x}{\partial t} = \mathrm{const} = 0,$$

поскольку производная может быть отлична от нуля только в случае, когда волна распространяется в отрицательном направлении ($c < 0$).

Таким образом, в случае одного измерения $A_x = 0$.

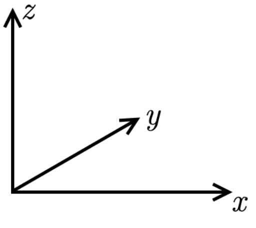


Рис. 12.10

Рассмотрим декартову систему координат, оси которой образуют правую тройку векторов (см. рис. 12.10).

Пусть ось y выбрана по направлению A_y. В этом случае, согласно (12.13), направление электрического поля $\vec{E}$ будет иметь только одну компоненту E_y.

$$E_y = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_y}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_y}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{dA_y}{d\xi}\cdot(-c) = \frac{dA_y}{d\xi}.$$

Напряженность электрического поля вдоль оси z будет равна нулю

$$E_z = 0,$$

поскольку направление оси y было выбрано совпадающим с A_y.

Напряженность магнитного поля определяется из следующего соотношения:

$$H_\alpha = e_{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial A_\beta}{\partial x_\gamma}. \tag{12.17}$$

В этом соотношении $\gamma = 2$, а $\beta = 1$, поэтому $\alpha = 3$. Тогда уравнение (12.17) примет вид:

$$H_3 = e_{312}\frac{\partial A_y}{\partial x} = \frac{\partial A_y}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{dA_y}{d\xi}.$$

Следовательно, отлична от нуля будет только z-компонента магнитного поля. Таким образом, в общем случае

$$|\vec{E}| = |\vec{H}|, \qquad \vec{E} \perp \vec{H}.$$

Вектор Умова – Пойнтинга будет направлен по направлению распространения волны

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}[\vec{E}, \vec{H}] = \frac{c}{4\pi}H^2\vec{n},$$

где $\vec{n}$ — направление распространения волны.

Таким образом при отсутствии зарядов поле в вакууме может существовать в виде электромагнитных волн.

4. Монохроматические волны

Частный случай волн — **монохроматические волны**. Уравнения Максвелла при отсутствии зарядов и токов примут вид:

$$\begin{cases} \operatorname{div}\vec{E} = 0, \\ \operatorname{div}\vec{H} = 0, \\ \operatorname{rot}\vec{H} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot}\vec{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \end{cases} \tag{12.18}$$

Ввиду линейности уравнений, решение будем искать в комплексном виде:

$$\vec{E} = E_0 e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}}, \qquad \vec{H} = H_0 e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}},$$

где $\vec{k}$ — волновой вектор.

В этом случае $\operatorname{div}\vec{E}$ — дивергенция вектора и градиент скаляра, поэтому первые два уравнения в (12.18) примут вид:

$$\begin{cases} \vec{E}\vec{k} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E} \perp \vec{k}, \\ \vec{H}\vec{k} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{H} \perp \vec{k}. \end{cases} \tag{12.19}$$

В третьем уравнении системы (12.18) из векторного произведения оператора $\vec{\nabla}$ на $\vec{H}$ будет дифференцироваться только векторная часть экспоненты, поэтому

$$i[\vec{k}, \vec{H}] = \frac{-i\omega}{c}\vec{E} \quad \Rightarrow \quad [\vec{k}, \vec{H}] = -\frac{\omega}{c}\vec{E}. \tag{12.20}$$

Аналогично для четвертого уравнения системы (12.18) получим:

$$i[\vec{k}, \vec{E}] = \frac{i\omega}{c}\vec{H} \quad \Rightarrow \quad [\vec{k}, \vec{E}] = \frac{\omega}{c}\vec{H}. \tag{12.21}$$

Выразив $\vec{H}$ из уравнения (12.21), получим:

$$\vec{H} = \frac{1}{\frac{\omega}{c}}[\vec{k}, \vec{E}]$$

Подставляя это значение в уравнение (12.20), получим

$$[\vec{k}, \vec{H}] = \frac{1}{\frac{\omega}{c}}[\vec{k}, [\vec{k}, \vec{E}]] = \frac{1}{\frac{\omega}{c}}\left(\vec{k}(\vec{k}\vec{E}) - \vec{E}(\vec{k})^2\right) = -\frac{\omega}{c}\vec{E}$$

Согласно первому уравнению в (12.19)

$$\vec{k}(\vec{k}\vec{E}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad \Rightarrow \quad |\vec{k}| = \frac{\omega}{c}. \tag{12.22}$$

Волновой вектор $\vec{k}$ можно записать в следующем виде:

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{n},$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор.

Подставляя это выражение в (12.20), (12.21), получим, что

$$\vec{H} = [\vec{n}, \vec{E}], \qquad \vec{E} = [\vec{H}, \vec{n}].$$

По определению, $(-i\omega t + i\vec{k}\vec{r})$ — **фаза волны**, зависящая от расстояния и времени. Фаза волны должна быть **релятивистским инвариантом**.

Пусть значение фазы таково, что в четырехмерном пространстве Минковского в некоторой точке фаза равна нулю. Тогда в любой системе координат значение фазы в этой точке равно нулю.

Таким образом, рассматривая фазу как событие, происходящее в четырехмерном пространстве Минковского, становится ясно, что фаза волны — релятивистский инвариант.

Следовательно,

$$\frac{\omega}{c}ct - \vec{k}\vec{r} = \text{const}.$$

В начале курса была рассмотрена теорема о признаке вектора: если существуют четыре величины, которые, будучи умноженными на произвольный контравариантный вектор, дают скаляр, то эти четыре величины являются ковариантным вектором.

Следовательно, ковариантный вектор

$$K_i = \left(\frac{\omega}{c}, -\vec{k}\right),$$

а контравариантный вектор в этом случае имеет вид:

$$K^i = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right).$$

Таким образом, волновой 4-вектор — контравариантный вектор, у которого нулевая компонента равна $\frac{\omega}{c}$. Скалярное произведение:

$$K^2 = K_i K^i = \frac{\omega^2}{c^2} - \vec{k}^2 = 0.$$

Тот факт, что волновой вектор является 4-вектором, дает возможность преобразовывать направление и частоту координат в другую.

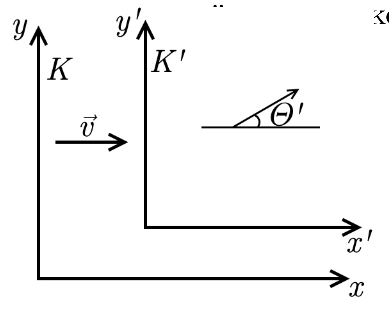


Рис. 12.11

Пусть есть некоторая система K, относительно которой со скоростью $\vec{v}$ движется система K' (см. рис. 12.11). В этом случае, согласно преобразованиям Лоренца, выражение для нулевой компоненты примет вид:

$$\frac{\omega}{c} = \frac{\frac{\omega'}{c} + \frac{v}{c}\frac{\omega'}{c}\cos\theta'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{12.23}$$

где θ' — направление волны в системе K'.

Аналогично можно записать выражение для x-компоненты 4-вектора.

$$K_x = \frac{\omega}{c}\cos\theta = \frac{\frac{\omega'}{c}\cos\theta' + \frac{v}{c}\frac{\omega'}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{12.24}$$

Согласно (12.23), преобразование частоты примет вид:

$$\omega = \omega' \frac{1 + \frac{v}{c}\cos\theta'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{12.25}$$

а преобразование угла получим, поделив (12.24) на (12.23):

$$\cos\theta = \frac{\cos\theta' + \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}\cos\theta'}. \tag{12.26}$$

Формула (12.25) отвечает **эффекту Доплера**, причем релятивистский эффект Доплера проявляется даже тогда, когда $\cos\theta' = 0$, то есть в движущейся системе излучение распространяется перпендикулярно оси x.

Это явление, названное «**поперечный эффект Доплера**», послужило одной из важнейших проверок специальной теории относительности.

Эффект Доплера, фактически, является основой современной космологии: он позволяет, например, определить скорости движения галактик. В конце двадцатого века было открыто ускоренное расширение Вселенной: эффект Доплера помог определить скорости далеких галактик, а интенсивность сверхновых звезд — расстояние до этих галактик.

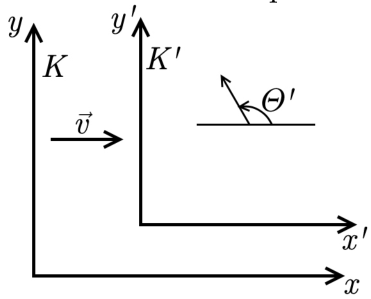


Рис. 12.12

Пусть в системе K', движущейся относительно K со скоростью $\vec{v}$, излучение испускается под углом

$$\theta' > \pi/2.$$

В этом случае $\cos\theta' < 0$ (см. рис. 12.12).

Если $v/c \sim 1$, то, согласно выражению (12.26), $\cos\theta$ в неподвижной системе координат будет положительной величиной, кроме случая, когда

$$\cos\theta' \to -1.$$

Таким образом, излучение при ультрарелятивистских скоростях направлено в положительном направлении оси x. Возьмем телесный угол $d\Omega'$, в котором распространяется электромагнитная волна:

$$d\Omega' = \sin\theta'\, d\phi'\, d\theta' = d(\cos\theta')\, d\phi'. \tag{12.27}$$

В движущейся системе координат косинус угла можно вычислить, изменив знак скорости в (12.26).

$$\cos\theta' = \frac{\cos\theta - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}\cos\theta} \quad \Rightarrow \quad d(\cos\theta') = \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right)^2} d(\cos\theta).$$

Углы ϕ' и ϕ одинаковы в обеих системах координат: поперечное значение волнового вектора одинаково, поэтому

$$d\Omega' = \frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)^2}\,d\Omega. \tag{12.28}$$

В ультрарелятивистском случае, когда $v/c \to 1$, положив $\theta = 0$, получим:

$$\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{\left(1-\frac{v}{c}\right)^2} = \frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}} \to \infty.$$

Поскольку v/c не в точности равно единице, то в лабораторной системе координат максимум излучения расположен под очень маленьким углом к оси x. В ультрарелятивистском случае, когда $v/c \sim 1$,

$$\gamma^2 = \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} \approx \frac{1}{2\left(1-\frac{v}{c}\right)}.$$

Учитывая это выражение, при малых углах θ получим, что:

$$1-\frac{v}{c}\cos\theta = 1-\frac{v}{c}\left(1-\frac{\theta^2}{2}\right) = \left(1-\frac{v}{c}\right)+\frac{v\theta^2}{2c} = \left(1-\frac{v}{c}\right)(1+\gamma^2\theta^2).$$

В этом случае выражение (12.28) примет вид:

$$d\Omega' = \frac{4\gamma^2}{(1+\gamma^2\theta^2)^2}\,d\Omega.$$

Таким образом, почти все излучение будет сосредоточено в угле

$$\theta \sim \frac{1}{\gamma}.$$