ЛЕКЦИЯ 5

УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА. НОРМИРОВКА ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ НЕПРЕРЫВНОГО СПЕКТРА. СТАЦИОНАРНЫЕ СОСТОЯНИЯ

1. Принцип соответствия, уравнение Шредингера. Оператор Гамильтона различных систем

На основании первого постулата квантовой механики задание вектора состояния в момент времени t_0 должно определять его в любой другой момент времени t:

$$|\Psi\rangle_{t_0} \to |\Psi\rangle_t = \hat{U}(t, t_0)\,|\Psi\rangle_{t_0}\,.$$

Было показано, что оператор $\hat{U}$ — унитарный, то есть

$$\hat{U}^\dagger \hat{U} = I.$$

В случае, когда t мало отличается от t_0

$$|\Psi\rangle_{t_0+\delta t} = \hat{U}(t_0+\delta t, t_0)\,|\Psi\rangle_{t_0}\,. \tag{5.1}$$

Затем на прошлой лекции было показано, что если унитарный оператор зависит от бесконечно малой величины и

$$\hat{U}(t_0, t_0) = I,$$

то

$$\hat{U}(t+\delta t, t) = I + i\hat{K}\delta t + O(\delta t^2).$$

В этом выражении $\hat{K}$ — эрмитов оператор, то есть

$$\hat{K}^\dagger = \hat{K}.$$

Для c-чисел унитарный оператор аналогичен величине $e^{i\alpha}$. При малых значениях α:

$$e^{i\alpha} \simeq 1 + i\alpha + O(\alpha^2).$$

С точностью до членов порядка δt^2, выражение (5.1) принимает следующий вид:

$$|\Psi\rangle_t + \delta t \frac{\partial}{\partial t} |\Psi\rangle + O(\delta t^2) = (I + i\hat{K}\delta t + O(\delta t^2)) |\Psi\rangle_t .$$

В этом выражении

$$I |\Psi\rangle_t = |\Psi\rangle_t ,$$

поэтому с точностью до членов порядка δt^2 получим следующее выражение

$$\frac{\partial}{\partial t} |\Psi\rangle = i\hat{K} |\Psi\rangle , \qquad (5.2)$$

где $\hat{K}$ — эрмитов оператор.

Ранее было доказано, что физической величине отвечает эрмитов оператор. Имеет место и обратное утверждение: эрмитову оператору отвечает некая физическая величина.

Для того, чтобы понять смысл оператора $\hat{K}$, необходимо сформулировать еще один принцип помимо принципа суперпозиции состояний.

Определение 10: Принцип соответствия *заключается в том, что при определенных условиях квантовая механика должна переходить в классическую, а действие операторов, отвечающих физическим величинам, должны сводиться к умножению вектора состояния на соответствующую величину.* ♣

Чтобы рассматривать траектории, вектор состояния надо описывать в представлении, где физическими величинами являются координаты.

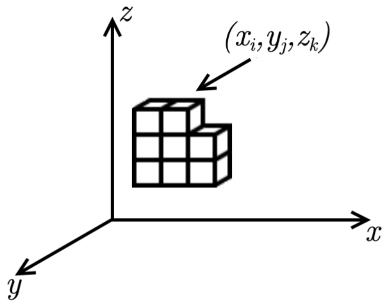

Рис. 5.1

Разобьем все пространство на клетки, в каждой из которых расположим детектор, который определяет наличие в клетке частицы (см. рис. 5.1). Тогда такие координаты будут физическими величинами.

Представим вектор состояния $|\Psi\rangle$ следующим образом:

$$|\Psi\rangle = \sum_{[\vec{h}]_n} \psi([\vec{h}]_n, t) \left| x_i y_j z_k \right\rangle, \qquad [\vec{h}]_n (x_i, y_j, z_k). \tag{5.3}$$

Покажем, что функция $\psi([\vec{h}]_n, t)$ описывает движение по некоторой траектории.

Рассмотрим следующий пример. Волновая оптика, оперирующая волнами, переходит при малых длинах волн в геометрическую оптику (оперирующую лучами).

Между геометрической оптикой и классической механикой, оперирующей траекториями, существует определенная аналогия (см. рис. 5.2).

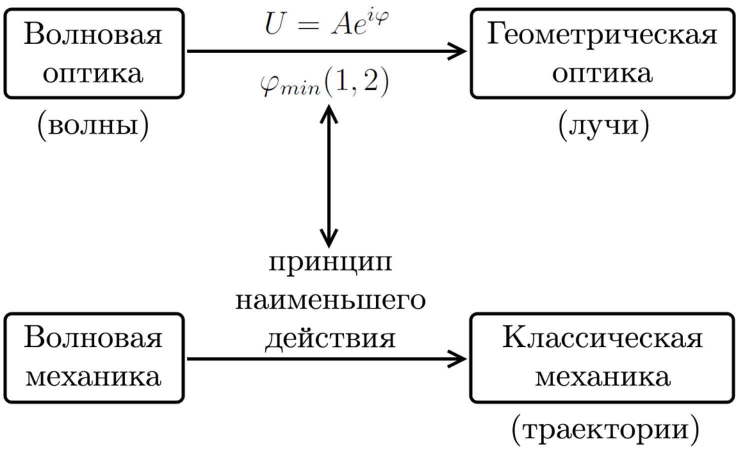

Рис. 5.2

Распространение света между двумя точками подчиняется принципу Ферма.

Переход от волновой оптики к геометрической осуществляется следующим образом:

$$U = Ae^{i\phi},$$

где U — напряжение электрического или магнитного поля
ϕ — эйконал.

Распространение лучей между двумя точками (см. рис. 5.3) подчиняется условию минимума эйконала:

$$\phi_{min}(1,2).$$

В классической механике существует принцип наименьшего действия. Аналогично тому, как осуществляется переход от волновой оптики к геометрической, попробуем осуществить переход от волновой механики к классической.

Переход от волновой оптики к геометрической осуществляется при условии, что длина волны много меньше расстояния между точками 1 и 2, которое проходит свет

$$\lambda \ll L.$$

Это означает, что на участке фронта волны лучи направлены перпендикулярно фронту (см. рис. 5.4). В этом случае ϕ можно записать следующим образом:

$$\phi = -\omega t + \vec{k}[\vec{h}]. \tag{5.4}$$

5.2cm

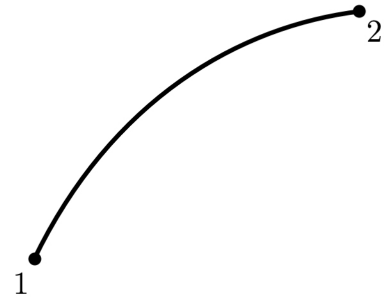

Рис. 5.3

Расстояние вдоль волнового вектора

$$k \cdot L \gg 1 \quad \Rightarrow \quad L \gg \frac{1}{k} = | = \frac{\lambda}{2\pi}.$$

При этом выполняются следующие соотношения:

$$\nabla\phi = \vec{k}, \qquad \frac{\partial\phi}{\partial t} = -\omega.$$

Следовательно, по аналогии с использованием принципа минимума эйконала при переходе от волновой механики к классической необходимо использовать принцип наименьшего действия.

В этом случае функцию ψ в выражении (5.3) необходимо записать следующим образом:

$$\psi(\vec{[h]}, t) = Ae^{i\frac{S}{\hbar}}, \tag{5.5}$$

где $\hbar$ вводится для соблюдения размерности.

В этом выражении действие S — функция координат и времени. Коэффициент A также может зависеть от координат и времени, но, как и в случае с эйконалом, производные от действия S по координатам и времени должны значительно превышать производные от A по этим же переменным. В этом случае выражение (5.2) примет следующий вид:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{i}{\hbar}\frac{\partial S}{\partial t}\psi, \tag{5.6}$$

поскольку x_i, y_j, z_k это не координаты частиц, а координаты детекторов, находящихся в определенных ячейках.

Производные действия по времени и координатам равны:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H, \qquad \vec{\nabla}S = \vec{\mathcal{P}},$$

где H — функция Гамильтона,
$\vec{\mathcal{P}}$ — обобщенный импульс.

В простейшем случае обобщенный импульс $\vec{\mathcal{P}}$ определяется как обычный импульс:

$$\vec{\mathcal{P}} = m\vec{v}.$$

Выражение (5.6) в классическом пределе принимает следующий вид:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{i}{\hbar}(-H)\psi. \tag{5.7}$$

Согласно принципу соответствия, действие классической функции Гамильтона отвечает в предельном случае действию оператора Гамильтона

$$\hat{H} \to H.$$

Сравнивая выражения (5.7) и (5.2), получим:

$$\frac{\partial\psi(\vec{[h]}, t)}{\partial t} = iK\psi \quad \Rightarrow \quad iK = -\frac{i}{\hbar}H.$$

В пределе в квантовом случае функция Гамильтона должна переходить в оператор Гамильтона. В результате получим **уравнение Шредингера** в наиболее общем виде:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\Psi\right\rangle = \hat{H}\left|\Psi\right\rangle, \tag{5.8}$$

где $\hat{H}$ — оператор Гамильтона, соответствующий классической функции Гамильтона.

Найдем вид оператора Гамильтона в некоторых случаях. **Для отдельной частицы** функция Гамильтона имеет вид:

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{[h]}),$$

где $V(\vec{[h]})$ — потенциальная энергия.

Следовательно, чтобы узнать вид оператора Гамильтона необходимо узнать вид оператора импульса

$$\hat{H} = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} + V(\vec{[h]}). \tag{5.9}$$

Продифференцировав выражение (5.5) по координатам, получим:

$$\vec{\nabla}\psi = \frac{i}{\hbar}\vec{\nabla}S\psi = \frac{i}{\hbar}\vec{\mathcal{P}}\psi.$$

Воспользуемся принципом соответствия, утверждающим, что умножение на физическую величину (в данном случае — импульс) отвечает действию оператора импульса. Перенеся в предыдущем выражении коэффициент $i/\hbar$ в левую часть, получим **оператор импульса** в координатном представлении:

$$-i\hbar\vec{\nabla}\psi = \vec{\mathcal{P}} \quad \Rightarrow \quad \hat{\vec{p}} = -i\hbar\vec{\nabla}. \tag{5.10}$$

Это позволяет найти вид оператора Гамильтона (5.9). К постулатам квантовой механики, полученным из принципа суперпозиции, добавится третий постулат, получающийся из принципа соответствия.

Определение 11: Третий постулат квантовой механики *заключается в том, что уравнение Шредингера, где $\hat{H}$ — оператор, соответствующий функции Гамильтона, записывается в виде* (5.8). *А оператор импульса частицы в координатном представлении задается выражением* (5.10). ♣

В дальнейшем будет получено, что оператор импульса можно записать также в других представлениях. При введении предельного перехода (5.5) впервые вводится квантовая постоянная $\hbar$. Сравнивая градиент этой величины ψ с градиентом эйконала, получим:

$$\frac{\vec{p}}{\hbar} = \vec{k} \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = \hbar\vec{k}.$$

Сравнивая производную по времени выражения (5.5) и производную по времени эйконала и учитывая, что функция Гамильтона, не зависящая от времени, это энергия, поэтому

$$\frac{\mathcal{E}}{\hbar} = \omega \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E} = \hbar\omega.$$

Таким образом, предельный переход соответствует гипотезе Планка и результатам, которые были получены Штарком.

Рассмотрим несколько различных гамильтонианов. **Для системы, состоящей из двух частиц** вектор состояния примет следующий вид:

$$\left|\vec{[}h]_1, \vec{[}h]_2\right\rangle.$$

По прежнему будем считать, что в каждой клетке пространства есть детектор, фиксирующий попадание частиц в определенные клетки и умеющий различать эти частицы. В этом случае вектор состояния $|\Psi\rangle$ примет следующий вид:

$$|\Psi\rangle = \sum_{\vec{[}h]_1, \vec{[}h]_2} \psi(\vec{[}h]_1, \vec{[}h]_2, t) \left|\vec{[}h]_1, \vec{[}h]_2\right\rangle.$$

Уравнение Шредингера (5.8) не изменится, а оператор Гамильтона примет следующий вид:

$$\hat{H} = \frac{\hat{\vec{p}}_1^{\,2}}{2m_1} + \frac{\hat{\vec{p}}_2^{\,2}}{2m_2} + V(|\vec{[}h]_1 - \vec{[}h]_2|) + V_1(\vec{[}h]_1) + V_2(\vec{[}h]_2),$$

где $V(|\vec{[}h]_1 - \vec{[}h]_2|)$ — потенциальная энергия взаимодействия между частицами.

Уравнение Шредингера в этом случае будет содержать шесть переменных координат.

Рассмотрим теперь гамильтониан **частицы, находящейся в электромагнитном поле**. В случае классической частицы в электромагнитном поле нерелятивистское выражения для функции Гамильтона имело следующий вид:

$$H = mc^2 + \frac{\left(\vec{\mathcal{P}} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2}{2m} + e\phi, \tag{5.11}$$

где $\vec{\mathcal{P}}$ — обобщенный импульс частицы, в классическом представлении имеющий следующий вид:

$$\vec{\mathcal{P}} = \vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A}, \qquad \vec{p} = m\vec{v}.$$

При переходе от классической механики к квантовой оператор Гамильтона, согласно (5.11) и принципу соответствия, окажется равным:

$$\hat{H} = mc^2 + \frac{\left(\hat{\vec{\mathcal{P}}} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2}{2m} + e\phi, \qquad \hat{\vec{\mathcal{P}}} = -i\hbar\vec{\nabla}. \tag{5.12}$$

Рассмотрим важное свойство уравнения Шредингера.

Свойство 12 Квантовая механика **обратима по времени**. *

Док-во: Заменим в уравнении Шредингера (5.8)

$$t \to t' = -t.$$

Если взять комплексно сопряженное значение от обеих частей уравнения Шредингера, то левая часть, очевидно, не изменится:

$$i\hbar\frac{\partial\psi^*}{\partial t'} = \hat{H}^*\psi^*.$$

Следовательно, уравнение Шредингера обратимо по временим, если заменить

$$\psi \to \psi^*,$$

а гамильтониан остается неизменным при комплексном сопряжении:

$$\hat{H}^* = \hat{H}.$$

В случае простого Гамильтониана (5.9) это требование, очевидно, выполняется.

Казалось бы, что для оператора Гамильтона (5.12) это условие неприменимо: он меняется при комплексном сопряжении. Однако, не было учтено, что при обращении времени вектор-потенциал меняет знак на противоположный, поскольку при отражении времени напряженность электрического поля не изменяется, а напряженность магнитного поля меняет знак

$$t \to t' = -t, \qquad \vec{A} \to -\vec{A}. \tag{5.13}$$

■

поскольку

$$\vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A} \quad \Rightarrow \quad -\vec{H} = -\operatorname{rot}\vec{A} = \operatorname{rot} -\vec{A}.$$

В этом случае, при комплексном сопряжении гамильтониана (5.12) и замене (5.13) выполняется условие обратимости по времени

$$\hat{H}^*(-\vec{A}) = \hat{H}(\vec{A}),$$

что и требовалось доказать. ■

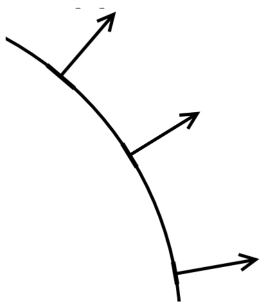

Рис. 5.4

2. Нормировка волновых функций непрерывного спектра

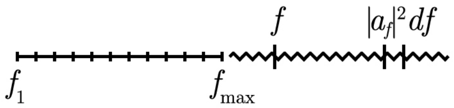

Рис. 5.5

Пусть теперь физическая величина имеет не только дискретный, но и непрерывный спектр (см. рис. 5.5). Пусть в некоторой области

$$[f_1, f_{max}]$$

физическая величина имеет дискретные значения, а затем приобретает непрерывные.

В качестве базиса в этом случае необходимо рассматривать не только дискретные, но и непрерывные состояния. В этом случае вектор состояния можно записать следующим образом:

$$|\Psi\rangle = \sum_n a_n |f_n\rangle + \int a(f)\,|f\rangle\, df,$$

где $|f\rangle$ — некоторое состояние из непрерывного спектра.

Дискретные состояния легко нормировать на единицу:

$$\langle f_n | f_m \rangle = \delta_{nm}. \tag{5.14}$$

Поскольку дискретные и непрерывные состояния имеют различные собственные значения, то

$$\langle f_n | f \rangle = 0. \tag{5.15}$$

Величину a_n легко найти, умножив вектор состояния $|\Psi\rangle$ слева на $\langle f_n|$ (то есть спроецировав его на $|f_n\rangle$):

$$a_n = \langle f_n | \Psi \rangle.$$

Найдем, какое требование необходимо наложить на состояния непрерывного спектра, чтобы

$$a(f) = \langle f | \Psi \rangle.$$

В этом случае

$$a(f) = \int \langle f | f' \rangle a(f')\, df', \tag{5.16}$$

поскольку, согласно (5.15) состояния с дискретным спектром ортогональны состояниям с непрерывным спектром.

Весь интеграл (5.16) отображается в некоторое значение функции $a(f)$. Это возможно в том случае, когда скалярное произведение состояний $|f\rangle$ и $|f'\rangle$ есть дельта-функция Дирака

$$\langle f | f' \rangle = \delta(f' - f).$$

Найдем, как в этом случае будет выражаться скалярное произведение

$$\langle \Psi | \, \Psi \rangle.$$

Дискретная часть уже известна

$$\langle \Psi | \, \Psi \rangle_{\text{дискр.}} = \sum_{n,m} a_n^* a_m \, \langle f_n | \, f_m \rangle.$$

Перекрестная часть (скалярное произведение дискретной части на непрерывную или непрерывной на дискретную) обращается в ноль согласно (5.15). Непрерывная часть будет иметь следующий вид:

$$\iint a^*(f') a(f) \, \langle f' | \, f \rangle \, df' \, df = \iint a^*(f') a(f) \delta(f' - f) \, df' \, df.$$

Интегрируя это выражение по f' и заменив, согласно (5.14), выражение для дискретной части, получим следующее выражение для скалярного произведения:

$$\langle \Psi | \, \Psi \rangle = \sum_n |a_n|^2 + \int |a(f)|^2 \, df = 1,$$

поскольку вектор состояния должен быть нормирован на единицу, чтобы коэффициенты имели смысл вероятностей.

В этом случае:

1. $|a_n|^2$ — вероятность того, что при измерении будет получено значение f_n.
2. $a(f)^2 \, df$ — вероятность того, что при измерении будет получено значение в интервале df:
$$dW_{f,f+df} = |a(f)|^2 \, df.$$

Следовательно, величина $|a(f)|^2$ имеет смысл **плотности вероятности**.

Если понимать величину (5.3) как интеграл Лебега

$$|\Psi\rangle = \sum \psi([\vec{h}]_n, t) \, |x_i, y_j, z_k\rangle \to \iiint \psi([\vec{h}], t) \, \big|[\vec{h}]\big\rangle \, dV,$$

то в координатном представлении ψ отвечает **амплитуде вероятности**.

Вероятность того, что координаты окажутся в некотором объеме dV равна

$$dW = |\psi|^2 \, dx \, dy \, dz.$$

Таким образом, $|\psi^2|$ также имеет смысл плотности вероятности. В первом постулате квантовой механики было выдвинуто требования конечной нормы вектора состояния, однако:

$$\langle f | \, f' \rangle = \begin{cases} 0, & f \neq f' \\ \infty, & f = f' \end{cases}$$

В континууме нельзя выделить, например, иррациональное число. Можно выделить только некоторую окрестность.

Физическим состоянием является случай, когда f берется в некотором интервале. Взяв физическое состояние $|f\rangle_{\text{ф}}$ такое, что

$$|f\rangle_{\text{ф}} = \int\limits_{f-\frac{\delta f}{2}}^{f+\frac{\delta f}{2}} c(f')\,|f'\rangle\, df',$$

получим набор состояний в некотором интервале.

Такое физическое состояние, безусловно, нормируемое

$$\langle f_{\text{ф}}|\, f_{\text{ф}}\rangle = \iint c^*(f')c(f'')\,\langle f'|\, f''\rangle\, df'\, df'' = \int\limits_{f-\frac{\delta f}{2}}^{f+\frac{\delta f}{2}} |c(f')|^2\, df'.$$

Взяв

$$c^2 = \frac{1}{\delta f},$$

получим, что значение этого интеграла равно единице.

Таким образом, третий постулат квантовой механики стоит **дополнить следующим образом**: ненормируемые состояния допускаются только в том случае, если из них можно составить нормируемый пакет волн в сколь угодно малой области.

Пространство с конечной нормой, как известно, называется гильбертовым пространством. Состояние $|f\rangle$ — монохроматическое состояние. Монохроматических состояний в природе не существует — частоты всегда изменяются в определенных пределах.

Монохроматические состояния допустимы, поскольку из них всегда можно составить физическое состояние с конечной нормой.

3. Среднее значение физической величины

Ранее было введено понятие среднего значения оператора. Пусть физической величине f отвечает оператор $\hat{f}$

$$f \to \hat{f},$$

среднее значение которого в некотором состоянии $|\Psi\rangle$ равно

$$\overline{\hat{f}} = \langle\Psi|\,\hat{f}\,|\Psi\rangle\,. \tag{5.17}$$

Представим состояние $|\Psi\rangle$ в виде суперпозиции собственных состояний величины f:

$$|\Psi\rangle = \sum_n a_n\,|f_n\rangle\,,$$

где

$$\hat{f}\,|f_n\rangle = f_n\,|f_n\rangle\,.$$

В этом случае среднее значение оператора (5.17) примет следующий вид:

$$\overline{\hat{f}} = \sum_{n,m} a_n^* a_m\,\langle f_n|\,\hat{f}\,|f_m\rangle\,.$$

Поскольку состояние $|f_m\rangle$ — собственное состояние оператора $\hat{f}$, то

$$\overline{\hat{f}} = \sum_{n,m} a_n^* a_m f_m \langle f_n | f_m \rangle = \sum_{n,m} a_n^* a_m f_m \delta_{nm} = \sum_n |a_n|^2 f_n.$$

Это выражение вполне естественно, поскольку $|a_n|^2$ — вероятность того, что в результате опыта значение физической величины окажется равным f_n.

Таким образом, среднее значение оператора совпадает со средним значением физической величины. Это выражение имеет место, если состояние $|\Psi\rangle$ записано в виде суперпозиции состояний той же самой физической величины f.

Запишем теперь состояние $ket\Psi$ как сумму состояний по другой физической величине g:

$$|\Psi\rangle = \sum_n b_n |g_n\rangle.$$

Среднее значение оператора $\hat{f}$ по-прежнему равно:

$$\overline{\hat{f}} = \langle \Psi | \hat{f} | \Psi \rangle = \sum_{n,m} b_n^* b_m \langle g_n | \hat{f} | g_m \rangle.$$

В этом случае

$$f_{nm} = \langle g_n | \hat{f} | g_m \rangle$$

есть матрица оператора $\hat{f}$ в представлении, где в качестве физической величины используется величина g.

Если в качестве базисных векторов использовать вектора состояний другой физической величины, то среднее значение величины f окажется равным:

$$\overline{f} = \sum_{n,m} b_n^* f_{nm} b_m.$$

В матричном виде это выражение можно записать следующим образом:

$$\overline{f} = (b_1^*, b_2^*, \dots, b_n^*) \begin{pmatrix} f_{11} & \dots & f_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n_1} & \dots & f_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

В базисе собственных векторов оператора $\hat{f}$ матрица f_{nm} имела бы диагональный вид.

4. Стационарные состояния

Пусть гамильтониан не зависит от времени. В классической механике в этом случае он совпадает с энергией.

Чтобы найти энергию в квантовой механике, необходимо решить следующее уравнение в координатном представлении:

$$\hat{H} |\phi_n\rangle = \varepsilon_n |\phi_n\rangle,$$

где ε_n — собственные значения,

$|\phi_n\rangle$ — соответствующий n-ому собственному значению вектор состояния.
Решение уравнения Шредингера будем искать в виде:

$$|\Psi\rangle = T(t)\,|\phi_n\rangle\,.$$

Подставляя это решение в уравнение Шредингера (5.8), получим:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,|\Psi\rangle = \hat{H}\,|\Psi\rangle \quad\Rightarrow\quad i\hbar\frac{\partial T}{\partial t}\,|\phi_n\rangle = \hat{H}\,|\phi_n\rangle\,T = \varepsilon_n\,|\phi_n\rangle\,T.$$

Следовательно, для временной части уравнение примет следующий вид:

$$i\hbar\frac{dT}{dt} = \varepsilon_n T.$$

Решение этого уравнения выражается в экспоненциальном виде:

$$T = Ae^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon_n t}.$$

Таким образом, частное решение уравнения Шредингера имеет следующий вид:

$$|\Psi_{ч}\rangle = Ae^{-\frac{i\varepsilon_n t}{\hbar}}\,|\phi_n\rangle\,. \tag{5.18}$$

Решение (5.18) с определенной энергией, когда гамильтониан не зависит от времени, называется **стационарным решением** (поскольку стационарные состояния — состояния с определенной энергией).

Сформулируем свойства стационарного состояния:

Свойство 13 В стационарном состоянии среднее значение любой физической величины, не зависящей от времени, остается постоянным. *

Док-во: Пусть физическая величина f и ее оператор $\hat{f}$ не зависят от времени. В этом случае, согласно выражениям (5.17) и (5.18)

$$\overline{f} = \langle\Psi|\,\hat{f}\,|\Psi\rangle = |A|^2 e^{\frac{i\varepsilon_n t}{\hbar}} e^{-\frac{i\varepsilon_n t}{\hbar}}\,\langle\phi_n|\,\hat{f}\,|\phi_n\rangle = |A|^2\,\langle\phi_n|\,\hat{f}\,|\phi_n\rangle = \text{const},$$

поскольку собственные значения оператора $\hat{f}$ не зависят от времени. ■

Свойство 14 Вероятность получения тех или иных значений физической величины f, не зависящей от времени, также постоянна. *

Док-во: В стационарном состоянии $|\Psi_{cm}\rangle$

$$a_n = \left\langle \hat{f}\right|\Psi_{cm}\rangle = A^* e^{\frac{i}{\hbar}\varepsilon_n t}\left\langle \hat{f}\right|\phi_n\rangle,$$

где матричный элемент $\left\langle \hat{f}\right|\phi_n\rangle$ не зависит от времени.

Вероятность W в этом случае:

$$W = |a_n|^2 = a_n^* a_n = \text{const},$$

что и требовалось доказать. ■

Стационарное состояние по свойствам напоминает стоячую волну: в некоторой точке происходят колебания, однако их амплитуда не меняется.

Рассмотрим суперпозицию двух стационарных состояний с энергиями ε_1 и ε_2:

$$|\Psi\rangle = c_1 e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon_1 t} + c_2 e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon_2 t}.$$

При вычислении среднего значения физической величины обязательно возникнут перекрестные члены, что приведет к зависимости от времени. Таким образом, **суперпозиция двух стационарных состояний** не является стационарным состоянием.