ЛЕКЦИЯ 6

ИМПУЛЬСНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ. ПЛОТНОСТЬ ПОТОКА ВЕРОЯТНОСТИ. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ОДНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ

1. Импульсное представление

Рассмотрим импульсное представление вектора состояния частиц. Разберем сначала случай одномерного движения.

Вектор состояния частицы в конфигурационном представлении (в котором в качестве физических величин выбраны координаты) имеет вид:

$$|\Psi\rangle = \sum_{(x)} \psi(x)\, |x\rangle\,.$$

Поскольку величина x принимает непрерывные значения, эту сумму стоит понимать в смысле интеграла Лебега.

Если в качестве физической величины, определяющей вектор состояния, взять собственные состояния импульса частицы, тогда

$$|\Psi\rangle = \sum_{(p)} a(p)\, |p\rangle = \sum_{(x)} \psi(x)\, |x\rangle\,. \tag{6.1}$$

Зная вектор состояния в конфигурационном представлении, можно вычислить вектор состояния в импульсном представлении. Умножив уравнение (6.1) скалярно на $\langle x|$, получим:

$$\psi(x) = \sum_{(p)} a(p)\, \langle x|\, p\rangle. \tag{6.2}$$

Точно так же можно найти величину амплитуды состояния в разложении по импульсам. Умножив (6.2) слева на $\langle p|$, получим:

$$a(p) = \sum_{(x)} \psi(x) \langle p| x\rangle.$$

На самом деле, надо понимать, что под умножением, например выражения (6.2) на $\langle x|$ подразумевается следующая операция:

$$\langle x| \Psi\rangle = \sum_{(x')} \psi(x') \langle x| x'\rangle \sum_{(x')} \psi(x')\delta_{xx'} = \psi(x).$$

В силу ортогональности собственных состояний, скалярное произведение

$$\langle p| x\rangle = \langle x| p\rangle^*. \tag{6.3}$$

Найдем собственный вектор импульса $|p\rangle$ в конфигурационном представлении. Будем считать, что собственный вектор импульса, принадлежащий значению p' — собственный вектор оператора $\widehat{p}$:

$$\widehat{p}\,|p'\rangle = p'\,|p'\rangle\,. \tag{6.4}$$

Представим вектор $|p'\rangle$ в конфигурационном представлении

$$|p'\rangle = \sum_{(x')} \psi_{p'}(x)\,|x'\rangle\,. \tag{6.5}$$

Оператор $\widehat{p}$ известен в конфигурационном представлении (поскольку рассматривается случай одной переменной, запишем прямые производные вместо частных)

$$\widehat{p} = -i\hbar\frac{d}{dx}.$$

В этом случае уравнение (6.4) может быть записано следующим образом:

$$\widehat{p}\sum_{(x')} \psi_{p'}(x')\,|x'\rangle = \sum_{(x')} -i\hbar\frac{d\psi_{p'}(x')}{dx'}\,|x'\rangle = p'\sum_{(x')} \psi_{p'}(x')\,|x'\rangle\,.$$

Сравнивая два полученных выражения, получим следующее уравнение (знак штрих теперь можно опустить):

$$-i\hbar\frac{d\psi_p}{dx} = p\psi_p.$$

Решение этого дифференциального уравнения имеет следующий вид:

$$\psi_p(x) = A\cdot e^{\frac{i}{\hbar}px},$$

где $\psi_p(x)$ — амплитуда состояния, отвечающая вектору состояния с определенным импульсом в координатном представлении.

Спектр импульсов сплошной, поэтому нормировка волнового состояния осуществляется на δ-функцию:

$$\langle p| p'\rangle = \delta(p'-p).$$

В конфигурационном пространстве

$$\langle p|\, p'\rangle = |A|^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{i}{\hbar}px} e^{\frac{i}{\hbar}p'x} dx. \tag{6.6}$$

Известно следующее представление дельта-функции Дирака:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} d\xi = 2\pi\delta x.$$

Таким образом, выражение (6.6) принимает следующий вид:

$$\langle p|\, p'\rangle = |A|^2 2\pi\delta\left(\frac{p'-p}{\hbar}\right) = |A|^2 2\pi\hbar\delta(p'-p) \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}.$$

Следовательно, вектор состояния в импульсном пространстве (6.5) представляется следующей функцией:

$$\psi_p(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{1/2}} e^{\frac{i}{\hbar}px}.$$

Функция $\psi_p(x)$ — скалярное произведение вектора состояния $|x\rangle$ и $|p\rangle$

$$\psi_p(x) = \langle x|\, p\rangle.$$

Это позволяет перейти от конфигурационного представления к импульсному и наоборот. Следовательно, согласно (6.2)

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i}{\hbar}px} a(p)\, dp. \tag{6.7}$$

Амплитуда $a(p)$ выражается через $\psi(x)$ аналогичной формулой. Учитывая (6.3), получим следующее выражение:

$$a(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{i}{\hbar}px} \psi(x)\, dx. \tag{6.8}$$

Формулы (6.7) и (6.8) определяют, соответственно, переход от импульсного представления к конфигурационному и от конфигурационного к импульсному.

С математической точки зрения эти значения есть амплитуды Фурье. Этот переход можно обобщить на трехмерный случай. В случае, когда вектор состояния для трехмерного движения записывается в виде

$$|\Psi\rangle = \sum_{(\vec{[h]})} \psi(\vec{[h]}) \left|\vec{[h]}\right\rangle = \sum_{(\vec{p})} a(\vec{p})\, |\vec{p}\rangle\,,$$

где под вектором $\vec{[h]}$ понимаются одновременно координаты x, y, z.

Формулы (6.7) и (6.8) примут в этом случае следующий вид:

$$\left[\begin{array}{l} \psi(\vec{[h]}) = \dfrac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \displaystyle\iiint \; e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\,\vec{[h]}} a(\vec{p})\, dp_x\, dp_y\, dp_z \\ a(\vec{p}) = \dfrac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \displaystyle\iiint \; e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}\,\vec{[h]}} \psi(\vec{[h]})\, dx\, dy\, dz \end{array}\right. \tag{6.9}$$

поскольку множитель по каждой из координат пропорционален $(2\pi\hbar)^{-1/2}$.

Формулы (6.9) позволяют решать некоторые практические задачи. Рассмотрим следующий

4.2cm

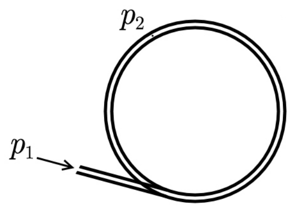

Рис. 6.1

пример.

Пример 2 Для того, чтобы убедиться в существовании антипротона в Дубне был построен ускоритель (см. рис. 6.1). Энергия, необходимая для реакции

$$p_1 + p_2 \to \overline{p} + 3p$$

вычисляется по следующей формуле (если считать, что второй протон изначально покоился):

$$S = (\underline{p}_1 + \underline{p}_2)^2 = m^2 + 2m\varepsilon_1 + m^2 > (4m)^2 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_1 > 7m.$$

Если ввести константу c:

$$\varepsilon_1 > 7mc^2 \simeq 7 \text{ ГэВ}.$$

Ускоритель в Дубне был способен разогнать протоны до энергии порядка 10 ГэВ. В США в Беркли существовал ускоритель, энергия которого не достигала 7 ГэВ.

Если рассматривать рассеяние протона не на протоне, а на ядре, то покоящийся протон имеет некоторое импульсное распределение (см. рис. 6.2). Следовательно, существует случай, когда, казалось бы, покоящийся протон движется навстречу пучку (1).

В этом случае порог реакции будет ниже, поэтому Сегре и Чемберлен смогли в 1955 году на ускорителе в Беркли получить антипротон, а затем и антинейтрон. $\ast$

Рассмотрим действие оператора координаты в импульсном представлении. Для одномерного случая:

$$|\Psi\rangle = \sum_{(x')} \psi(x')\, |x'\rangle = \sum_{(p')} a(p')\, |p'\rangle\,.$$

Подействуем оператором $\hat{x}$ на вектор состояния:

$$\hat{x}\, |x'\rangle = x'\, |x'\rangle\,.$$

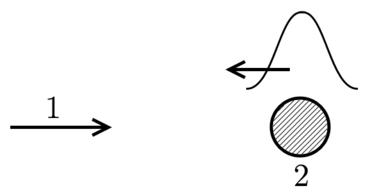

Рис. 6.2

Следовательно, действие оператора $\hat{x}$ в конфигурационном представлении сводится к умножению функции $\psi(x')$ на x'. В импульсном представлении:

$$\hat{x}\left|\Psi\right\rangle_p = \sum_{(p')} a(p')\hat{x}\left|p'\right\rangle = \sum_{(p)} b(p)\left|p\right\rangle.$$

Умножив это выражение слева на вектор $|p\rangle$, получим амплитуду $b(p)$:

$$b(p) = \sum_{p'} \langle p|\,\hat{x}p'\rangle a(p'), \tag{6.10}$$

где $\langle p|\,\hat{x}p'\rangle$ — матрица оператора $\hat{x}$ в импульсном представлении. При умножении матрицы на вектор-столбец (в дискретном случае), результатом также является вектор-столбец.

Вычислять эту матрицу удобно в координатном представлении:

$$\langle p|\,\hat{x}p'\rangle = \frac{1}{2\pi\hbar}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{i}{\hbar}px}xe^{\frac{i}{\hbar}px}\,dx.$$

Этот интеграл расходится по абсолютному значению. Попробуем записать его в виде некоторой производной:

$$\langle p|\,\hat{x}p'\rangle = \frac{1}{2\pi\hbar}\frac{\hbar}{i}2\pi\frac{d}{dp'}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i}{\hbar}(p'-p)x}dx = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dp'}\delta(p'-p).$$

Соотношение (6.10) необходимо понимать как интеграл Лебега, поэтому

$$b(p) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{h}{i}\cdot\frac{d}{dp'}\delta(p'-p)a(p')\,dp'. \tag{6.11}$$

Из курса математического анализа известно, что если

$$y(x) = \int y(x')\delta(x'-x)\,dx' \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\int y(x')\frac{d}{dx'}\delta(x'-x)\,dx'.$$

Следовательно, выражение (6.11) принимает следующий вид:

$$b(p) = -\frac{\hbar}{i}\frac{da(p)}{dp} = i\hbar\frac{da(p)}{dp}.$$

Для наглядности рассмотрим следующую таблицу:

Физическая величина	Конфигурационное представление	Импульсное представление
$[\vec{h}]$	$[\vec{h}]$	$i\hbar\vec{\nabla}_p$
$\vec{p}$	$-i\hbar\vec{\nabla}_r$	$\vec{p}$

Физическим величинам должны отвечать эрмитовы операторы. Покажем, что оператор импульса в конфигурационном представлении эрмитов. Рассмотрим оператор:

$$\hat{L} = \lambda \frac{d}{dx}.$$

В этом случае эрмитово сопряженный оператор должен удовлетворять следую- щему

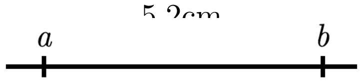

Рис. 6.3

соотношению:

$$\langle \Phi | \, \hat{L} \, | \Psi \rangle = \left\langle \hat{L}^{\dagger} \Phi \middle| \, \Psi \right\rangle. \tag{6.12}$$

и пусть x меняется в некотором интервале (a, b) (см. рис. 6.3).

Будем считать, что на концах интервала

$$\Phi(a) = \Phi(b), \qquad \Psi(a) = \Psi(b).$$

В общем случае можно устремить

$$a \to -\infty, \qquad b \to +\infty,$$

а функции Φ и Ψ на концах интервала считать равными нулю.

В этом случае выражение (6.12) примет следующий вид:

$$\int\limits_a^b \Phi^* \lambda \frac{d\Psi}{dx} dx = \Phi^* \lambda \Psi \Big|_a^b - \lambda \int\limits_a^b \frac{d\Phi^*}{dx} \Psi = - \int\limits_a^b \left(\lambda^* \frac{d\Phi}{dx} \right)^* \Psi \, dx.$$

Следовательно, согласно (6.12), эрмитово сопряженный оператор:

$$\hat{L}^{\dagger} = -\lambda^* \frac{d}{dx}.$$

Чтобы оператор $\hat{L}^{\dagger}$ был равен $\hat{L}$ необходимо, чтобы

$$\lambda^* = -\lambda,$$

то есть величина λ должна быть чисто мнимой величиной.

Следовательно, оператор импульса в конфигурационном представлении и оператор координаты в импульсном представлении эрмитовы.

2. Плотность потока вероятности

Запишем уравнение Шредингера в конфигурационном представлении:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + (V_1 + iV_2)\Psi, \qquad V_2 = 0, \tag{6.13}$$

хотя потенциал, очевидно, должен быть действительным, чтобы оператор Гамильтона был эрмитовым.

Комплексно сопряженное уравнению (6.13) уравнение Шредингера имеет вид:

$$-i\hbar\frac{\partial\Psi^*}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi^* + (V_1 - iV_2)\Psi^*. \tag{6.14}$$

Умножив уравнение (6.13) на Ψ^*, а уравнение (6.14) на Ψ, и вычтя из первого уравнения второе, получим:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(\Psi^*\Psi) = -\frac{\hbar^2}{2m}(\Psi^*\Delta\Psi - \Psi\Delta\Psi^*) + 2iV_2|\Psi|^2, \tag{6.15}$$

где

$$\Psi^*\Psi = |\Psi|^2.$$

Выражение в скобках в правой части выражения (6.15) легко преобразовать следующим образом:

$$\Psi^*\Delta\Psi - \Psi\Delta\Psi^* = \operatorname{div}(\Psi^*\vec\nabla\Psi - \Psi\vec\nabla\Psi^*),$$

поскольку:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\Psi^*\vec\nabla\Psi) = \Psi^*\Delta\Psi + \vec\nabla\Psi^*\vec\nabla\Psi; \\ \operatorname{div}(\Psi\vec\nabla\Psi^*) = \Psi\Delta\Psi^* + \vec\nabla\Psi\vec\nabla\Psi^*; \end{cases}$$

Умножив выражение (6.15) на $i/\hbar$, получим, что:

$$-\frac{\partial}{\partial t}|\Psi|^2 = \operatorname{div}\vec j - \frac{2}{\hbar}V_2|\Psi|^2, \qquad V_2 = 0. \tag{6.16}$$

Вектор $\vec j$ в этом выражении имеет следующий вид:

$$\vec j = -\frac{i\hbar}{2m}(\Psi^*\vec\nabla\Psi - \Psi\vec\nabla\Psi^*). \tag{6.17}$$

Рассмотрим физический смысл этого выражения. Закон сохранения заряда в дифференциальной форме имеет вид:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec j = 0.$$

Эта формула выражает, что уменьшение заряда в некотором объеме равно потоку через поверхность, окружающую этот объем.

$$-\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho\, dV = \oint\!\!\!\oint \vec j\vec n\, dS.$$

Выражение (6.17), по существу, выражает то же самое. Пусть в некотором объеме (см. рис. 6.4)

$$\iiint |\Psi|^2 \, dV$$

существует вероятность найти частицу в этом объеме.

Эта вероятность может измениться, поскольку частицы входят или выходят из этого объема, следовательно

$$-\frac{\partial}{\partial t} \iiint |\Psi|^2 \, dV = \oiint \vec{j}\vec{n} \, dS.$$

Это выражение есть не что иное, как закон сохранения вероятности, в котором величина $\vec{j}$, задающаяся выражением (6.17), представляет собой **плотность потока вероятности**.

В случае заряда

$$\vec{j} = \rho\vec{v}.$$

В выражении (6.17)

$$-i\hbar\vec{\nabla} \text{ — оператор импульса.}$$

Поделив его на массу m, получим оператор скорости. Коэффициент ${}^1\!/_2$ появляется, поскольку в скобке в выражении (6.17) два члена, причем второй член равен комплексно сопряженному первому. Таким образом, выражение в скобке — чисто мнимая величина, и, следовательно, $\vec{j}$ — действительная величина.

Таким образом, $\vec{j}$ — плотность потока вероятности. Пусть волновая функция имеет следующий вид:

$$\Psi = A(\vec{[h]})e^{i\phi(\vec{[h]})},$$

где $A(\vec{[h]})$ — действительная функция.

Подставляя такую функцию Ψ в выражение (6.17) увидим, что производные по $A(\vec{[h]})$ пропадут, поэтому:

$$\vec{j} = -\frac{i\hbar}{m}|A|^2 i\vec{\nabla}\phi = \frac{\hbar}{m}|A|^2\vec{\nabla}\phi. \tag{6.18}$$

Таким образом, условие того, чтобы

$$\vec{j} \neq 0$$

заключается в том, что волновая функция (амплитуда состояния в конфигурационном пространстве) содержала зависящую от расстояния фазу.

В случае, когда

$$\phi = \vec{k}\vec{[h]},$$

выражение (6.18) примет следующий вид:

$$\vec{j} = \frac{\hbar\vec{k}}{m}|A|^2 = \vec{v}\rho,$$

поскольку

$$\vec{p} = \hbar\vec{k} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \frac{\vec{p}}{m} = \frac{\hbar\vec{k}}{m}.$$

В некоторых задачах частица исчезает или, наоборот, рождается. Например, при рассеянии нейтронов на ядре некоторые нейтроны рассеиваются (и это описывается уравнением Шредингера), а некоторые могут поглощаться.

В этом случае полная вероятность не сохраняется, поэтому даже если потока вероятности нет, то есть

$$\operatorname{div}\vec{j} = 0,$$

наличие члена, пропорционального V_2, причем

$$V_2 < 0$$

в уравнении (6.16) означает, что вероятность не сохраняется.

В этом случае вероятность будет падать. В нейтронной физике, при рассмотрении рассеяния на ядрах иногда пользуются комплексным потенциалом V_2, мнимая часть которого описывает исчезновение (рождение) частиц.

[h]4.2cm

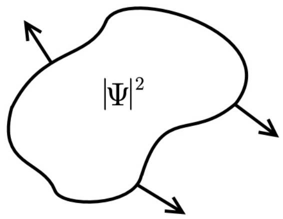

Рис. 6.4

3. Общие свойства одномерного движения частицы

Рассмотрим простейший случай — одномерное движение частицы. Позднее будет получено, что движение в сферическом поле можно свести к одномерному движению по радиусу.

Стационарное уравнение Шредингера имеет следующий вид:

$$\hat{H}\Psi = E\Psi,$$

следовательно

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + V(x)\Psi = E\Psi.$$

Перепишем это уравнение в следующем виде:

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + k^2(x)\Psi = 0, \qquad k^2(x) = \frac{2m(E - V(x))}{\hbar^2}. \tag{6.19}$$

Это уравнение — линейное дифференциальное уравнение второго порядка, имеющее два линейно независимых решения. Общее решение определяется как суперпозиция двух решений с двумя независимыми константами.

Если существуют два независимых решения, то детерминант

$$\begin{bmatrix} \Psi_1' & \Psi_2' \\ \Psi_1 & \Psi_2 \end{bmatrix} = W,$$

который называется детерминантом Вронского, постоянный.

Получить теорему о сохранении детерминанта Вронского можно тем же способом, как ранее было получено выражение для плотности потока вероятности. Необходимо уравнение (6.13) умножить на Ψ_2, а уравнение (6.14) на Ψ_1 и вычесть из одного уравнения другое.

В классической механике величина

$$2m(E - V(x))$$

была бы равна квадрату импульса, поскольку

$$E = \frac{mv^2}{2} + V(x) = \frac{p^2}{2m} + V(x) \quad \Rightarrow \quad (E - V(x)) \cdot 2m = \frac{p^2(x)}{2m} \cdot 2m = p^2(x).$$

Следовательно,

$$k^2(x) = \frac{p^2(x)}{\hbar^2},$$

где $k^2(x)$ — квадрат переменного волнового вектора.

В классической механике величина

$$E - V(x) = \frac{p^2(x)}{2m} \geqslant 0,$$

то есть мнимый импульс в классической механике недопустим.

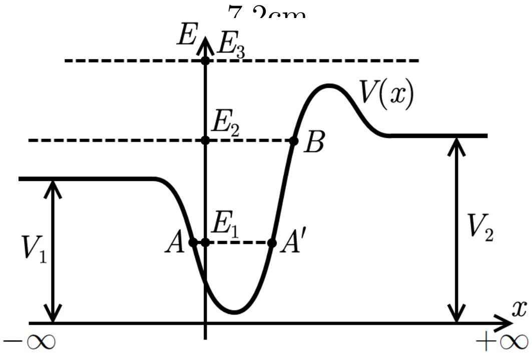

Рис. 6.5

Решая уравнение Шредингера для некоторого сложного потенциала (см. рис. 6.5) на всем интервале

$$x \in (-\infty, +\infty),$$

в зависимости от энергии можно попасти как в области, где

$$k^2(x) > 0,$$

так и в те, где

$$k^2(x) < 0.$$

При энергии E_1 классическая частица может двигаться только внутри «ямы», а точки A и A', где энергия частицы совпадает с потенциалом — точки остановки для классической частицы. Если же энергия равна E_2, то перемещение частицы ограничено точкой B.

Если же энергия

$$E \geqslant E_3,$$

то классическая частица может оказаться в любой точке прямой.

Рассмотрим вначале следующий случай. Пусть потенциал V постоянный и

$$E - V > 0 \quad \Rightarrow \quad E > V, \qquad k^2 > 0.$$

Следовательно, уравнение Шредингера (6.19) примет следующий вид:

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + k^2\Psi = 0 \quad \Rightarrow \quad \Psi = c_1 e^{ikx} + c_2 e^{-ikx}.$$

Таким образом, в классической области существуют два осциллирующих решения. В неклассической области

$$E - V < 0 \quad \Rightarrow \quad E < V \quad \Rightarrow \quad k^2 = -\kappa^2, \qquad \kappa^2 > 0.$$

В этом случае решение уравнения Шредингера (6.19) примет следующий вид:

$$\Psi = c_1 e^{\kappa x} + c_2 e^{-\kappa x},$$

то есть в неклассической области решение будет либо экспоненциально растущее, либо экспоненциально падающее.

Рассмотрев сложный потенциал $V(x)$ (см. рис. 6.5), сможем определить, что существуют три области (в зависимости от энергии), которые соответствуют трем физически различным областям движения.

Пусть для определенности

$$V_2 > V_1.$$

Определим эти области следующим образом:

$$\begin{aligned} &(\mathrm{I}): && E > V_2 \geqslant V_1 \\ &(\mathrm{II}): && V_2 > E > V_1 \\ &(\mathrm{III}): && E < V_1 \leqslant V_2 \end{aligned}$$

Качественный характер движения не зависит от формы потенциала, а зависит лишь от энергии по отношению к асимптотическим значениям потенциала на бесконечности.

Рассмотрим вначале первую область. При

$$x \to +\infty, \qquad V \to V_2,$$

и решение будет иметь вид:

$$\Psi = c_1 e^{ik_2x} + c_2 e^{-ik_2x}.$$

Выберем решение такое, что

$$\Psi_1 \xrightarrow[x\to+\infty]{} e^{ik_2x}.$$

Решение Ψ_1 представляет собой поток плотности вероятности (поток частицы), идущей слева направо. На левом конце оси x может существовать не только набегающая, но и отраженная волна:

$$\Psi_1 \xrightarrow[x\to-\infty]{} \alpha_{11} e^{ik_1x} + \alpha_{12} e^{-ik_1x}, \tag{6.20}$$

причем величины α_{ik} зависят от энергии и являются функциями потенциала

$$\alpha = \alpha_{ik}(E, \Phi(V)).$$

Второе решение возьмем равным комплексно-сопряженному. Это удобно сделать, поскольку Ψ_1 и Ψ_1^* — линейно независимые решения. Тогда

$$\alpha_{12}^* e^{ik_1x} + \alpha_{11}^* e^{-ik_1x} \xleftarrow[x\to-\infty]{} \Psi_2 = \Psi_1^* \xrightarrow[x\to+\infty]{} e^{-ik_2x}. \tag{6.21}$$

При стационарной задаче производная по времени равна нулю, поэтому должен сохраняться поток вероятности j_x:

$$\operatorname{div}\vec{j} = \frac{\partial j_x}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad j_x = \text{const}.$$

В первом случае поток вероятности при $x \to +\infty$ равен:

$$j_{+\infty} = \frac{\hbar k_2}{m} = j_{прош.},$$

а при $x \to -\infty$ из равенства потоков следует, что

$$j_{-\infty} = \frac{\hbar k_1}{m}(|\alpha_{11}|^2 - |\alpha_{12}|^2) = j_{+\infty} = \frac{\hbar k_2}{m}. \tag{6.22}$$

В выражении (6.20) первое слагаемое отвечает падающей волне, а второе — отраженной, поэтому можно ввести следующие определения:

Определение 12: Коэффициент прохождения *слева направо*

$$D = \frac{j_{прош.}}{j_{пад.}} = \frac{1}{|\alpha_{11}|^2}\frac{k_2}{k_1}.$$

Определение 13: Коэффициент отражения

$$R = \frac{j_{отр.}}{j_{пад.}} = \frac{|\alpha_{12}|^2}{|\alpha_{11}|^2}.$$

Поделив соотношение (6.22) на k_1, получим, что

$$|\alpha_{11}|^2 - |\alpha_{12}|^2 = \frac{k_2}{k_1}.$$

Поделив, в свою очередь, это состояние на $|\alpha_{11}|^2$, получим:

$$1 - \frac{|\alpha_{12}|^2}{|\alpha_{11}|^2} = \frac{k_2}{k_1|\alpha_{11}|^2} \quad \Leftrightarrow \quad 1 - R = D \quad \Rightarrow \quad R + D = 1.$$

Это естественный результат, поскольку потерей вероятности нет, поэтому часть падающей волны проходит сквозь барьер, а часть этой волны отражается.

Возможно, что энергия

$$E = E_3.$$

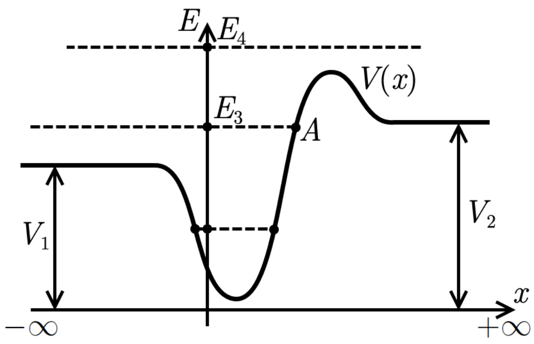

Рис. 6.6

В классической механике частица с такой энергией, дойдя до точки A, отразится от барьера и начнет движение в обратном направлении (см. рис. 6.6). В квантовой механике, согласно полученным результатам, возможно **подбарьерное (туннельное) прохождение частицы**.

Второй неклассический эффект заключается в том, что при энергии

$$E = E_4 > V, \quad \forall x$$

в классической механике частица не отразилась бы от барьера, а в квантовой механике возможно **надбарьерное отражение**.

Коэффициент прохождение справа налево и слева направо одинаков для любого потенциала. Пусть, например, потенциал $V(x)$ имеет следующий вид (см. рис. 6.7).

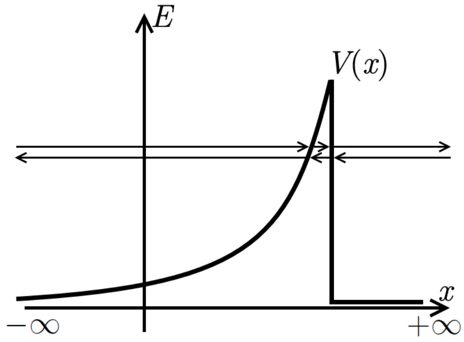

Рис. 6.7

Для того, чтобы описать движение справа налево нужно, чтобы при

$$x \to -\infty \qquad \Psi_1 = e^{-ik_1x},$$

то есть существовала только волна, распространяющаяся налево.

В случае I двукратное вырождение энергии отвечает, с физической точки зрения, тому, что возможно движение слева направо и справа налево. Умножив левую и правую часть выражения (6.20) на α_{12}^*, а левую и правую часть выражения (6.21) на α_{11}, и вычтя из первого выражения второе, получим в левой части только волну, пропорциональную

$$e^{-ik_1x}.$$

Таким образом, волновая функция, отвечающая движению справа налево будет иметь следующий вид:

$$\Psi = \alpha_{12}^*\Psi_1 + \alpha_{11}\Psi_2.$$

На правом конце в этом случае

$$\Psi = \alpha_{12}^* e^{ik_2x} + \alpha_{11}e^{-ik_2x},$$

причем первое слагаемое в этом выражении отвечает отраженной волне, а второе — падающей.

Следовательно, коэффициент отражения принимает следующий вид:

$$R' = \frac{|\alpha_{12}^*|^2}{|\alpha_{11}|^2} = R.$$

Следовательно, коэффициент прохождения справа налево и слева направо действительно одинаков и не зависит от формы потенциального барьера $V(x)$. Ранее было доказано, что Ψ и Ψ^* обратимы по времени. Соответственно этому, движение в прямом и обратном направлении повторяет друг друга, то есть коэффициент прохождения барьера одинаков с обеих сторон.