ЛЕКЦИЯ 9

КВАНТОВЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР. ПРОИЗВОДНАЯ ОПЕРАТОРА ПО ВРЕМЕНИ. СООТНОШЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ ДЛЯ ЭНЕРГИИ И ВРЕМЕНИ

1. Квантовый осциллятор

Выпишем некоторые соотношения, полученные на предыдущей лекции. Оператор Гамильтона для квадратичного потенциала (осциллятора):

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2.$$

Размерность энергии, импульса и координаты соответственно равна:

$$[E_0] = \hbar\omega, \qquad p_0 = \sqrt{m\hbar\omega}, \qquad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}},$$

поэтому удобно ввести безразмерный импульс и координату:

$$\hat{Q} = \frac{\hat{x}}{x_0}, \qquad \hat{\mathcal{P}} = \frac{\hat{p}}{p_0}.$$

Нетрудно показать, что в этом случае:

$$[\hat{\mathcal{P}}, \hat{Q}] = [\hat{p}, \hat{x}] \cdot \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} = \frac{-i\hbar}{\hbar} = -i.$$

Гамильтониан в безразмерных координатах примет следующий вид:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hbar\omega(\hat{\mathcal{P}}^2 + \hat{Q}^2) = \hbar\omega\hat{H}_0, \tag{9.1}$$

где $\widehat{H}_0$ — безразмерный гамильтониан.

Введем операторы

$$\hat{a} = \frac{\widehat{Q} + i\widehat{\mathcal{P}}}{\sqrt{2}}, \qquad \hat{a}^\dagger = \frac{\widehat{Q} - i\widehat{\mathcal{P}}}{\sqrt{2}}.$$

Также было получено выражение для произведения двух операторов в том и в другом порядке:

$$\hat{a}\hat{a}^\dagger = \frac{1}{2}(\widehat{\mathcal{P}}^2 + \widehat{Q}^2 + 1)$$

$$\hat{a}^\dagger\hat{a} = \frac{1}{2}(\widehat{\mathcal{P}}^2 + \widehat{Q}^2 - 1).$$

Следовательно, величина коммутатора

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1.$$

В этом случае, согласно (9.1), гамильтониан можно записать в следующем виде:

$$\widehat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega\widehat{H}_0.$$

Был также введен оператор $\widehat{N}$:

$$\widehat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a} \quad \Rightarrow \quad \widehat{H} = \hbar\omega\left(\widehat{N} + \frac{1}{2}\right) \tag{9.2}$$

Решение задачи о квантовом осцилляторе операторным методом (а не методом прямого интегрирования уравнения Шредингера) оказывается полезным в дальнейшем. При рассмотрении электромагнитного излучения, электромагнитного поля как состоящего из фотонов, операторы $\hat{a}$ и $\hat{a}^\dagger$ будут играть важную роль.

Чтобы найти собственные вектора оператора $\widehat{H}$ (9.2), очевидно, необходимо найти собственные вектора оператора $\widehat{N}$.

Задача о собственных значениях в этом случае примет следующий вид:

$$\hat{a}^\dagger\hat{a} = \lambda\left|\lambda\right\rangle, \tag{9.3}$$

где $|\lambda\rangle$ — некоторый вектор состояния, которому соответствует собственное значение λ.

Сформулируем и докажем несколько утверждений.

Утверждение 2 Покажем, что собственные значения оператора $\widehat{N}$ неотрицательные:

$$\lambda \geqslant 0.$$

Док-во: Умножив левую и правую часть выражения (9.3) на бра-вектор $\langle\lambda|$, получим:

$$\left\langle\lambda\right|\hat{a}^\dagger\hat{a}\left|\lambda\right\rangle = \lambda\left\langle\lambda\right|\lambda\rangle = \lambda, \tag{9.4}$$

■

поскольку $\langle\lambda|\,\lambda\rangle$ — скалярное произведение вектора состояния с самим собой, нормированное на единицу

Выражение в левой части (9.4) также больше нуля

$$\langle\lambda|\,\hat{a}^\dagger\hat{a}\,|\lambda\rangle = \langle\hat{a}\lambda|\,\hat{a}\lambda\rangle \geqslant 0,$$

поскольку это выражение также является скалярным произведением, хоть и ненормированным на единицу. Следовательно, собственные значения оператора $\hat{N}$ неотрицательные. ■

Утверждение 3 Результат действия оператора $\hat{a}^\dagger$ на вектор состояния $|\lambda\rangle$

$$\hat{a}^\dagger\,|\lambda\rangle \tag{9.5}$$

также является собственным вектором оператора $\hat{N}$. *

Док-во: Подействуем оператором $\hat{N}$ на полученный вектор:

$$\hat{N}\hat{a}^\dagger\,|\lambda\rangle = \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger\,|\lambda\rangle\,. \tag{9.6}$$

■

Воспользовавшись коммутационным соотношением, выразим оператор $\hat{a}\hat{a}^\dagger$:

$$\hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} = 1 \quad \Rightarrow \quad \hat{a}\hat{a}^\dagger = \hat{a}^\dagger\hat{a} + 1.$$

Следовательно, выражение (9.6) примет вид:

$$\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger\,|\lambda\rangle = \hat{a}^\dagger(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1)\,|\lambda\rangle\,.$$

Согласно (9.6), $|\lambda\rangle$ — собственный вектор оператора $\hat{a}^\dagger\hat{a}$, поэтому

$$\hat{N}\hat{a}^\dagger\,|\lambda\rangle = (\lambda + 1)\hat{a}^\dagger\,|\lambda\rangle\,.$$

Оператор $\hat{N}$, действующий на собственный вектор (9.4), возвращает новое собственное значение, умноженное на тот же самый вектор. ■

Таким образом, вектор $\hat{a}^\dagger\,|\lambda\rangle$ — собственный вектор оператора $\hat{N}$, но принадлежащий к более высокому собственному значению. Следовательно, оператор $\hat{a}^\dagger$ — повышающий оператор:

$$\hat{a}^\dagger\,|\lambda\rangle = C\,|\lambda + 1\rangle\,.$$

Утверждение 4 Аналогично утверждению 3 можно показать, что

$$\hat{a}\,|\lambda\rangle \tag{9.7}$$

также является собственным вектором оператора $\hat{N}$. *

Док-во: Снова подействуем оператором $\hat{N}$ на получающийся собственный вектор:

$$\hat{N}\hat{a}\,|\lambda\rangle = \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}\,|\lambda\rangle = (\hat{a}\hat{a}^\dagger - 1)\hat{a}\,|\lambda\rangle = \hat{a}(\hat{a}^\dagger\hat{a})\,|\lambda\rangle - \hat{a}\,|\lambda\rangle\,.$$

Согласно (9.3), $|\lambda\rangle$ — собственный вектор оператора $\hat{a}^\dagger\hat{a}$, поэтому:

$$\hat{N}\hat{a}\,|\lambda\rangle = (\lambda - 1)\hat{a}\,|\lambda\rangle\,.$$

Следовательно, оператор $\hat{N}$, действуя на собственный вектор (9.7), возвращает новое собственное значение, умноженное на тот же самый собственный вектор. ■

Таким образом, вектор $\hat{a}|\lambda\rangle$ — собственный вектор оператора $\hat{N}$, но принадлежащий более низкому собственному значению. Следовательно, оператор $\hat{a}$ — понижающий оператор.

$$\hat{a}|\lambda\rangle = C|\lambda - 1\rangle .$$

Утверждение 5 Минимальное собственное значение λ_{min} равно нулю:

$$\lambda_{min} = 0.$$

Док-во: Подействуем понижающим оператором $\hat{a}$ на собственный вектор $|\lambda\rangle$, а затем снова подействуем этим же оператором на получившееся состояние $|\lambda - 1\rangle$, и так далее:

$$|\lambda\rangle \xrightarrow{\hat{a}} |\lambda - 1\rangle \xrightarrow{\hat{a}} |\lambda - 2\rangle \xrightarrow{\hat{a}} \ldots ,$$

то есть полученное собственное значение на каждом шаге меньше предыдущего.

Но, согласно утверждению 2

$$\lambda \geqslant 0.$$

Это противоречие разрешается следующим образом: существует некоторое состояние $|\lambda_{min}\rangle$, отличное от нуля и такое, что результат действия на него понижающего оператора является нулевым вектором:

$$|\lambda_{min}\rangle \neq 0 : \qquad \hat{a}|\lambda_{min}\rangle = 0 = 0\,|\lambda_{min}\rangle . \tag{9.8}$$

■

Подействовав на (9.8) оператором $\hat{a}^\dagger$, получим:

$$\hat{a}^\dagger\hat{a}|\lambda_{min}\rangle = 0 = \hat{N}|\lambda_{min}\rangle = \lambda_{min}|\lambda_{min}\rangle .$$

Следовательно, минимальное собственное значение оператора $\hat{N}$ равно нулю:

$$\lambda_{min} = 0,$$

что и требовалось доказать. ■

Следующее собственное значение получается действием оператора $\hat{a}^\dagger$, то есть оно равно единице. Дважды подействовав оператором $\hat{a}^\dagger$ на $|\lambda_{min}\rangle$, получим собственное значение, равное двум, и так далее.

Следовательно, у оператора

$$\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$$

собственные значения — целые числа.

Обозначим теперь:

$$|\lambda\rangle = |n\rangle \quad \Rightarrow \quad \hat{N}|n\rangle = n|n\rangle . \tag{9.9}$$

В дальнейшем увидим, что в теории электромагнитного поля оператор $\hat{N}$ будет являться оператором числа фотонов. Согласно (9.9) и (9.2), собственные значения Гамильтониана окажутся равными:

$$\hat{H}|n\rangle = \hbar\omega\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right)|n\rangle = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)|n\rangle .$$

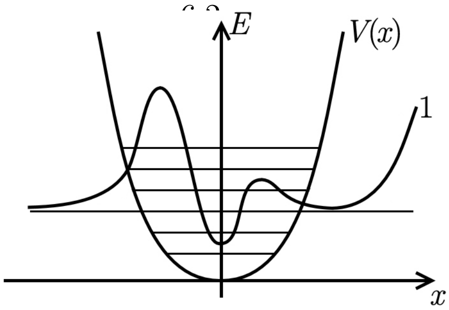

Рис. 9.1

Следовательно, энергия квантового осциллятора может принимать следующие значения:

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right). \tag{9.10}$$

При нахождении уровней энергии мы заранее предполагали, что для потенциала, выраженного квадратичной зависимостью:

$$V(x) = \frac{m\omega^2}{2}x^2$$

могут существовать только дискетные уровни энергии.

Если взять произвольную энергию E и добиться, чтобы слева волновая функция падала, то для произвольной энергии справа будет наблюдаться экспоненциальный рост (см. рис. 9.1).

Дискретные уровни были получены в предположении, что существует конечная норма векторов собственных состояний. Именно это условие учитывает, что экспоненциально растущее решение не может существовать.

Согласно (9.10), спектр уровней будет эквидистантным: расстояние между уровнями в нем постоянно (см. рис. 9.2). Существует нулевой уровень

$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2},$$

а каждый следующий уровень больше предыдущего на $\hbar\omega$.

Будем искать собственные вектора этой задачи $\hat{n}$ в конфигурационном представлении (хотя можно было бы и в импульсном):

$$|n\rangle = \sum_Q \psi(Q)\,|Q\rangle\,.$$

Согласно условию (9.8), в нулевом состоянии:

$$|0\rangle: \qquad \hat{a}\psi_0(Q) = 0,$$

что позволит найти нижнее значение $|0\rangle$.

Оператор

$$\hat{a} = \frac{\hat{Q} + i\hat{\mathcal{P}}}{\sqrt{2}},$$

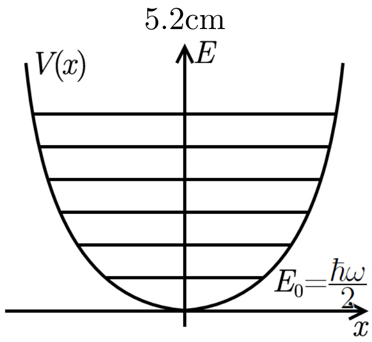

Рис. 9.2

где оператор $\hat{Q}$ в конфигурационном представлении отвечает умножению на координату Q, а оператор $\hat{\mathcal{P}}$ имеет вид:

$$\hat{\mathcal{P}} = -i\frac{\partial}{\partial Q} = -i\frac{d}{dQ},$$

поскольку задачу решаем в одномерном случае.

В этом случае оператор понижения $\hat{a}$ примет вид:

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{Q} + i\left(-i\frac{d}{dQ}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{Q} + \frac{d}{dQ}\right).$$

Следовательно, действуя оператором $\hat{a}$ на нулевое состояние, получим:

$$\left(\hat{Q} + \frac{d}{dQ}\right)\psi_0(Q) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\psi_0}{dQ} = -Q\psi_0.$$

Решим полученное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\frac{d\psi_0}{\psi_0} = -Q\,dQ \quad \Rightarrow \quad \ln\psi_0 = -\frac{Q^2}{2} + \ln A,$$

и, следовательно, волновая функция нижнего состояния:

$$\psi_0 = Ae^{-\frac{Q^2}{2}}.$$

Нормируя это состояние на единицу, получим значение коэффициента A:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\psi_0|^2\,dQ = |A|^2\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-Q^2}\,dQ = 1.$$

Из курса математического анализа известно, что этот интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-Q^2}\,dQ = \sqrt{\pi} \quad \Rightarrow \quad |A|^2\sqrt{\pi} = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}.$$

Волновая функция в нижнем состоянии примет следующий вид:

$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} e^{-\frac{Q^2}{2}}. \tag{9.11}$$

Вид этого нижнего состояния представлен на рисунке 9.3. Чтобы перейти от безразмерных величин $\mathcal{P}$ и Q к реальным величинам импульсов и перемещений, воспользуемся полученными на прошлой лекции соотношениями.

При нормировке на координату x, а не Q, в этом случае, в знаменателе (9.11) возникнет величина, пропорциональная $(\sqrt{x})^{-1}$.

Следовательно, волновая функция — размерная величина. В этом случае $\psi_0(x)$ примет следующий вид:

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}\frac{\hbar}{m\omega}}} e^{-\frac{x^2 m\omega}{2\hbar}}.$$

Когда величина $\hbar$ стремится к нулю, кривая (1) на рисунке 9.3 стремится «вытянуться» в δ-функцию (кривая $(1')$ на рисунке 9.3).

Получим теперь все остальные состояния. Подействовав оператором $\hat{a}^\dagger$ на известное нулевое состояние, можно получить следующее по порядку первое состояние:

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = C\,|n+1\rangle\,. \tag{9.12}$$

Определим величину коэффициента C в этом выражении. Взяв скалярное произведение обоих частей этого равенства и выразив квадрат коэффициента C, получим:

$$C^2 = \frac{\langle \hat{a}^\dagger n | \hat{a}^\dagger n\rangle}{\langle n+1 | n+1\rangle} = \langle n|\,\hat{a}\hat{a}^\dagger\,|n\rangle = \langle n|\,(\hat{a}^\dagger\hat{a}+1)\,|n\rangle = (n+1)\,\langle n|\,n\rangle = n+1.$$

Следовательно, величина

$$C = \sqrt{n+1}.$$

Аналогичным образом можно найти коэффициент, получающийся при действии понижающего оператора на состояние $|n\rangle$:

$$\hat{a}\,|n\rangle = D\,|n-1\rangle \quad \Rightarrow \quad D = \sqrt{n}. \tag{9.13}$$

При рассмотрении электромагнитного поля эти, казалось бы, тривиальные соотношения, оказывают большое влияние на физический смысл явлений.

Испускание фотона, согласно (9.13), пропорционально числу фотонов в системе, а в выражении (9.12) n соответствует вынужденному излучению, а единица — спонтанному излучению.

Соотношение (9.12), можно записать в следующем виде:

$$|n\rangle = \frac{\hat{a}^\dagger\,|n-1\rangle}{\sqrt{n}} = \frac{(\hat{a}^\dagger)^2\,|n-2\rangle}{\sqrt{n}\sqrt{n-1}} = ...$$

Таким образом, можно получить выражение для состояния $|n\rangle$ через нулевое состояние:

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n\,|0\rangle}{\sqrt{n!}}. \tag{9.14}$$

Следовательно, собственный вектор состояния $|n\rangle$ может быть получен следующим образом. По определению, в конфигурационном представлении:

$$\hat{a}^\dagger = \frac{\hat{Q} - i\hat{\mathcal{P}}}{\sqrt{2}} = \frac{Q - i\left(-i\frac{d}{dQ}\right)}{\sqrt{2}} = \frac{-\frac{d}{dQ} + Q}{\sqrt{2}}.$$

Подействовав этим оператором на волновую функцию нулевого состояния, получим:

$$\hat{a}^\dagger |0\rangle = \frac{A}{\sqrt{2}} \left(-\frac{d}{dQ} + Q\right) e^{-\frac{Q^2}{2}}.$$

Заметим, что

$$\left(\frac{d}{dQ} - Q\right) e^{\frac{Q^2}{2}} = e^{\frac{Q^2}{2}} \cdot \frac{2Q}{2} - Qe^{\frac{Q^2}{2}} = 0,$$

поэтому можно $e^{-\frac{Q^2}{2}}$ записать следующим образом:

$$e^{-\frac{Q^2}{2}} = e^{-Q^2} e^{\frac{Q^2}{2}}.$$

Действие оператора $\hat{a}^\dagger$ на нулевое состояние в этом случае запишется следующим образом:

$$C_1 |1\rangle - \hat{a}^\dagger |0\rangle = \frac{A}{\sqrt{2}} e^{\frac{Q^2}{2}} \left(-\frac{d}{dQ}\right) e^{-Q^2}.$$

Подействовав этим оператором еще несколько раз, чтобы получить n-ое состояние, получим, согласно (9.14), выражение для состояния $|n\rangle$:

$$|n\rangle = \frac{e^{\frac{Q^2}{2}} (-1)^n}{\sqrt{\sqrt{\pi}\, 2^n\, n!}} \frac{d^n}{dQ^n} e^{-Q^2}.$$

Полином Лежандра H_n определяется следующим образом:

$$H_n = e^{Q^2} \frac{d^n}{dQ^n} \left(e^{-\frac{Q^2}{2}}\right).$$

Следовательно, волновая функция в состоянии $|n\rangle$ примет следующий вид:

$$\langle Q|\, n\rangle = \frac{(-1)^n e^{-\frac{Q^2}{2}} H_n(Q)}{\sqrt{\sqrt{\pi}\, 2^n\, n!}}.$$

Рассмотрим вид матриц операторов $\hat{a}$ и $\hat{a}^\dagger$ и, соответственно, $\hat{Q}$ и $\hat{\mathcal{P}}$. Поскольку

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1}\, |n+1\rangle\,,$$

у оператора $\hat{a}^\dagger$ существуют только следующие матричные элементы:

$$\langle n+1|\, \hat{a}^\dagger\, |n\rangle = \sqrt{n+1},$$

то есть существуют только следующие матричные элементы:

$$(\hat{a}^\dagger)_{10}, (\hat{a}^\dagger)_{21}, \ldots$$

Матрица, отвечающая оператору $\hat{a}^\dagger$, примет следующий вид:

$$\hat{a}^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ \sqrt{1} & 0 & & \mathbf{0} & \\ & \sqrt{2} & 0 & & \\ & & \sqrt{3} & 0 & \\ & \mathbf{0} & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Поскольку

$$\hat{a}\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle\,,$$

то у оператора $\hat{a}$ существуют только следующие матричные элементы

$$(\hat{a})_{n-1,n} = \hat{a}_{01}, \hat{a}_{12}, \ldots$$

Следовательно, матрица, отвечающая оператору $\hat{a}$, имеет следующий вид:

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & & & \mathbf{0} \\ & 0 & \sqrt{2} & & \\ & & 0 & \sqrt{3} & \\ & & & 0 & \ddots \\ & \mathbf{0} & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Матричные элементы операторов $\hat{Q}$ и $\hat{\mathcal{P}}$ в этом случае примут вид:

$$\begin{cases} \hat{a} + \hat{a}^\dagger = \sqrt{2}\hat{Q} \\ \hat{a} - \hat{a}^\dagger = i\sqrt{2}\hat{\mathcal{P}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{Q} = \dfrac{\hat{a} + \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}} \\ \hat{\mathcal{P}} = \dfrac{\hat{a} - \hat{a}^\dagger}{i\sqrt{2}} \end{cases}$$

Следовательно, матрицы операторов $\hat{Q}$ и $\hat{\mathcal{P}}$ в энергетическом представлении примут следующий вид:

$$\hat{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & & & \mathbf{0} \\ \sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & & \\ & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \\ & & \sqrt{3} & 0 & \ddots \\ & \mathbf{0} & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \qquad \hat{\mathcal{P}} = \frac{1}{i\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & & & \mathbf{0} \\ -\sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & & \\ & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \\ & & -\sqrt{3} & 0 & \ddots \\ & \mathbf{0} & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Решение этой задачи важно, поскольку любой потенциал вблизи состояния равновесия частицы (то есть минимума потенциальной энергии) можно приближенно аппроксимировать квадратичной зависимостью, то есть осциллятором.

Также было показано, что пользуясь коммутационным соотношением и требованием существования конечной нормы можно получить решение, найдя спектр энергии и соответствующие волновые функции.

[h]6.2cm

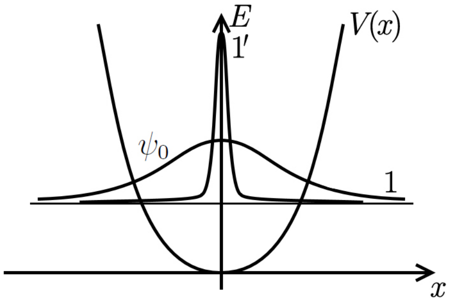

Рис. 9.3

2. Производная оператора по времени

Пусть есть некоторая физическая величина, которой отвечает оператор $\hat{f}$, и некоторый вектор состояния ψ.

В этом состоянии среднее значение величины f определяется следующим образом:

$$\overline{f} = \langle\psi|\,\hat{f}\,|\psi\rangle\,. \tag{9.15}$$

График зависимости вероятности получения того или иного значения $\hat{f}$ от самой величины f представлен на рисунке 9.4. Если величина $\hat{f}$ и ее оператор не зависит явно от времени, то среднее значение может меняться со временем.

6.2cm

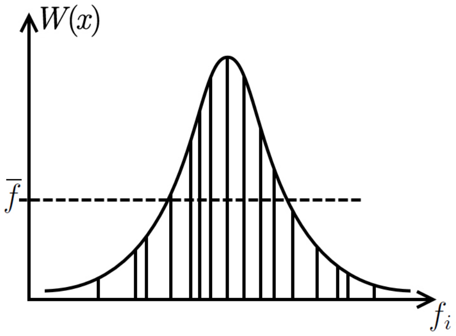

Рис. 9.4

Производная по времени, согласно (9.15), записывается следующим образом:

$$\frac{d\overline{f}}{dt} = \left\langle\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|\hat{f}\,|\psi\rangle + \langle\psi|\,\frac{\partial\hat{f}}{\partial t}\,|\psi\rangle + \langle\psi|\,\hat{f}\left|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right\rangle,$$

поскольку

$$i\hbar\frac{\partial\,|\psi\rangle}{\partial t} = \hat{H}\,|\psi\rangle\,, \qquad -i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,\langle\psi| = \langle\psi|\,\hat{H}.$$

Следовательно, производная по времени среднего значения физической величины примет вид:

$$\frac{d\overline{f}}{dt} = \overline{\frac{\partial\hat{f}}{\partial t}} + \frac{i}{\hbar}\,\langle\psi|\,\hat{H}\hat{f} - \hat{f}\hat{H}\,|\psi\rangle = \overline{\frac{\partial\hat{f}}{\partial t}} + \frac{i}{\hbar}\,\langle\psi|\,[\hat{H},\hat{f}]\,|\psi\rangle\,,$$

то есть производная среднего значения величины f есть сумма среднего значения производной оператора по времени и члена, пропорционального среднего значения коммутатора. Следовательно,

$$\frac{d\hat{f}}{dt} = \frac{\partial\hat{f}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}[\hat{H},\hat{f}].$$

Эта формула показывает, что даже если оператор явно не зависит от времени, а именно такие операторы будут рассматриваться в этом курсе, производная оператора по времени может оказаться не равна нулю, то есть среднее значение может меняться. Рассмотрим следствия этого соотношения.

3. Законы сохранения. Соотношение неопределенностей для энергии и времени

Если предположить, что среднее значение некоторой физической величины не меняется

$$\overline{f} = \text{const},$$

причем оператор этой физической величины не зависит явно от времени

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial t} = 0,$$

то оператор, отвечающий физической величине $\hat{f}$, должен коммутировать с гамильтонианом:

$$[\hat{f}, \hat{H}] = 0. \tag{9.16}$$

Выражение (9.16) — условие сохранения среднего значения величины. Коммутируемость операторов означает, что соответствующие им физические величины одновременно измеримы, то есть физическая величина f должна быть одновременно измерима с энергией.

При рассмотрении стационарных состояний говорилось, что для любой величины, не зависящей явно от времени, среднее значение постоянно:

$$|\psi\rangle = e^{-i\frac{E}{\hbar}t}\,|\phi\rangle\,, \qquad \hat{H}\,|\phi\rangle = E\,|\phi\rangle\,.$$

В стационарном состоянии,

$$\overline{f} = \langle\psi|\,\hat{f}\,|\psi\rangle = \langle\phi|\,\hat{f}\,|\phi\rangle = \text{const}.$$

Пусть существует нестационарное состояние. Простейшее нестационарное состояние — суперпозиция двух стационарных:

$$|\psi\rangle = C_1 e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t}\,|\phi_1\rangle + C_2 e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t}\,|\phi_2\rangle\,.$$

Найдем среднее значение величины f в этом состоянии:

$$\overline{f} = |C_1|^2\,\langle\phi_1|\,\hat{f}\,|\phi_1\rangle + |C_2|^2\,\langle\phi_2|\,\hat{f}\,|\phi_2\rangle + \\ + C_1^* C_2 e^{i\frac{E_1-E_2}{\hbar}t}\,\langle\phi_1|\,\hat{f}\,|\phi_2\rangle + C_1 C_2^* e^{-i\frac{E_1-E_2}{\hbar}t}\,\langle\phi_2|\,\hat{f}\,|\phi_1\rangle\,. \tag{9.17}$$

В общем случае получается, что среднее значение не зависящей от времени физической величины в нестационарном состоянии может зависеть от времени. Если величина $\hat{f}$ коммутирует с гамильтонианом, то у них существуют общие собственные функции:

$$f\,|\phi_1\rangle = f_1\,|\phi_1\rangle\,, \qquad \hat{H}\,|\phi_1\rangle = E_1\,|\phi_1\rangle\,.$$

В этом случае, например,

$$\langle\phi_2|\,\hat{f}\,|\phi_1\rangle = f_1\,\langle\phi_2|\,\phi_1\rangle = 0,$$

если

$$E_1 \neq E_2.$$

Таким образом, среднее значение физической величины остается постоянным только в том случае, когда эта величина коммутирует с гамильтонианом.

Из этого простейшего рассмотрения следует, например, соотношение неопределенностей между энергией и временем. Пусть величина $\hat{f}$ не коммутирует с гамильтонианом:

$$[\hat{f}, \hat{H}] \neq 0$$

и пусть

$$|C_1| \sim |C_2|.$$

В этом случае временные члены (третье и четвертое слагаемое в (9.17)) будут вносить изменение в среднее значение физической величины f. Изменение экспоненты скажется на таком интервале времени, когда

$$e^{i\frac{(E_1-E_2)t}{\hbar}} \sim 1,$$

то есть

$$\Delta t \cdot \Delta E \sim \hbar. \qquad (9.18)$$

Это соотношение носит название соотношение неопределенностей между энергией и временем. Это соотношение принципиально отличается, например, от соотношения неопределенностей для координаты и импульса:

$$\Delta p \cdot \Delta x \sim \hbar.$$

В этом соотношении величины x и p лежат в некоторых интервалах, причем изменение (увеличение) дисперсии δp $(1 \to 2)$ ведет к уменьшению дисперсии δx $(1' \to 2')$ (см. рис. **??**–**??**).

В соотношении (9.18) время считается измеренным точно, поэтому не существует неопределенности времени. Величина Δt является промежутком времени, в течении которого среднее значение физической величины, не коммутирующей с гамильтонианом, существенно изменяется.

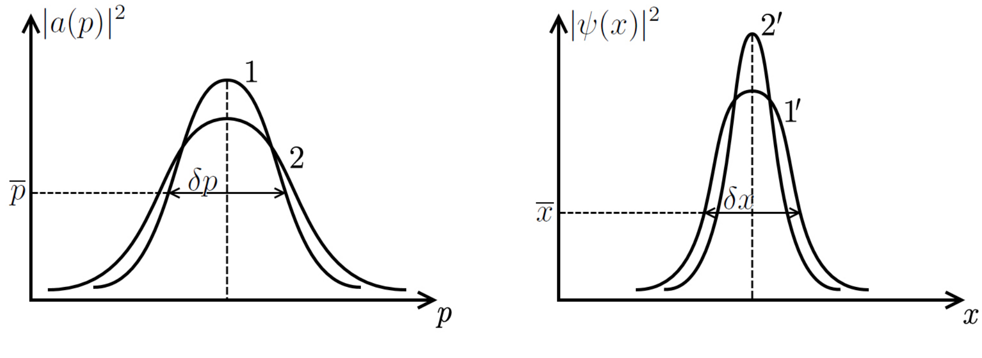

Рис. 9.5

Докажем соотношение (9.18) более строго, пользуясь определением производной оператора по времени:

$$\frac{d\overline{f}}{dt} = \frac{i}{\hbar}\overline{[\hat{H}, \hat{f}]},$$

причем

$$[\hat{H}, \hat{f}] \neq 0.$$

Изменение среднего значения за короткий промежуток времени:

$$d\overline{f} = \frac{i}{\hbar}\overline{[\hat{H}, \hat{f}]}\,\Delta t.$$

Существенное изменение среднего значения означает, что это изменение должно превысить величину корня из дисперсии:

$$d\overline{f} = \frac{i}{\hbar}\overline{[\hat{H}, \hat{f}]}\,\Delta t > \sqrt{\delta f^2}. \qquad (9.19)$$

Согласно соотношению неопределенностей,

$$\delta f^2 \delta E^2 \geqslant \frac{1}{4}\left|\overline{[\hat{H}, \hat{f}]}\right|^2,$$

следовательно

$$\delta f^2 \geqslant \frac{1}{4\delta E^2}\left|\overline{[\hat{H}, \hat{f}]}\right|^2 \quad \Rightarrow \quad \delta f \geqslant \frac{1}{2}\left|\overline{[\hat{H}, \hat{f}]}\right| \cdot \frac{1}{\sqrt{\delta E^2}}.$$

Подставляя это выражение в (9.19), получим следующее неравенство:

$$\Delta t \geqslant \frac{\hbar}{2}\frac{1}{\sqrt{\delta E^2}} \sim \frac{\hbar}{\Delta E},$$

следовательно,

$$\Delta E \Delta t \geqslant \hbar,$$

что и было получено ранее из менее строгих соображений.

6.2cm

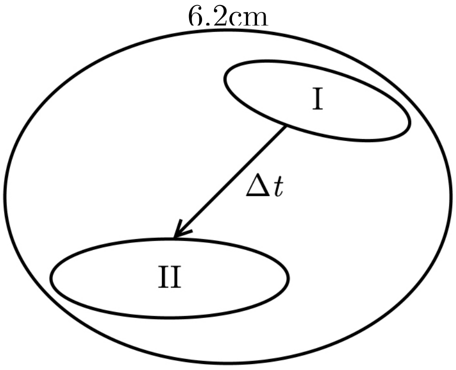

Рис. 9.6

Это соотношение можно представить в другой форме: пусть с некоторой системой I взаимодействует система II (см. рис. 9.6). Пусть система II сближается с системой I за некоторое время Δt.

Поскольку расстояние между системами меняется, то существует изменение физической величины. Это означает, что между изменением этой величины и энергией должно выполняться соотношение неопределенностей:

$$\Delta t \Delta E \sim \hbar. \qquad (9.20)$$

Таким образом, если взаимодействие продолжается некоторое время Δt, то это означает, что в общей системе существует неопределенность энергии ΔE, которая может быть выражена из соотношения (9.20).

Следовательно, какое бы слабое не было взаимодействие, первая система может получить энергию ΔE.

Казалось бы, согласно классическому рассмотрению, если вторая система взаимодействует с первой дольше, то первая в этом случае приобретает больше энергии. Однако, соотношение (9.20) показывает, что ситуация противоположная: если взаимодействие очень мало, то может оказаться, что в результате взаимодействия первая система получит большую энергию.

Можно было бы сказать, что на временном промежутке

$$\Delta t \sim \frac{\hbar}{\Delta E}$$

энергия не сохраняется.

Это явление позволяет существовать некоторым взаимодействиям — взаимодействиям, осуществляющимся путем обмена частиц. На заре развития ядерной физики было неизвестно, как протон и нейтрон могут удерживаться в ядре — понятия ядерных сил не существовал

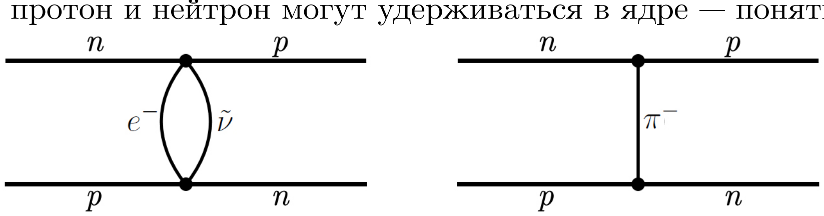

Рис. 9.7

Независимо друг от друга, И.Е. Тамм и Д.Д. Иваненко предположили, что взаимодействие нейтрона с протоном (см. рис. **??**) может осуществляться следующим образом: нейтрон, превращающийся в протон, испускает электрон и антинейтрино:

$$n \to p + e^- + \tilde{\nu}, \tag{9.21}$$

а протон, поглотив электрон и антинейтрино, превращается в нейтрон.

Такое объяснение, однако, не позволяло объяснить связи, возникающие в ядре.

Японский физик Юкава, узнав об этой идее, предположил, что нейтрон может испустить некоторую частицу (π^-)-мезон, превращаясь в протон (см. рис. 9.7). Протон, поглотив π^--мезон, превратится в нейтрон. Во время Юкавы ни сам π^--мезон, ни силы взаимодействия известны не были.

Был известен только радиус взаимодействия ядерных сил:

$$r_0 \simeq 1{,}4 \cdot 10^{-13} \text{ см}.$$

Исходя из величины радиуса действия сил, Юкава смог указать массу этой промежуточной частицы. Пусть масса этой промежуточной частицы равна μ. Чтобы испустить частицу, необходимо потратить энергию

$$\Delta E = \mu c^2.$$

Время, на которую можно испустить эту частицу, равно

$$\Delta t \sim \frac{\hbar}{\mu c^2}.$$

Расстояние, на которое π^--мезон может продвинуться при движении со скоростью порядка скорости света, равно

$$r \sim \frac{\hbar}{\mu c} \quad \Rightarrow \quad \mu \sim \frac{rc}{\hbar}.$$

Для электрона

$$r_e = \frac{\hbar}{m_e c} \simeq 4 \cdot 10^{-11} \text{ см},$$

а отношение

$$\frac{r_e}{r_я} \simeq \frac{4 \cdot 10^{-11}}{1{,}4 \cdot 10^{-13}} = 300 = \frac{\mu}{m_e}.$$

Таким образом, Юкава предсказал, что масса частицы должна быть порядка 300 масс электрона. Почти сразу же в космических лучах частицу с массой порядка

$$\mu \simeq 200 - 300\, m_e$$

удалось обнаружить.

Позднее оказалось, что это была другая частицы — был обнаружен μ-мезон. В 1948 году удалось обнаружить π^--мезон, распадающийся на μ-мезон и нейтрино.

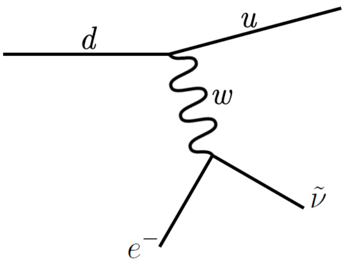

Рис. 9.8

β-распад (9.21) можно трактовать следующим образом: d-кварк переходит в u-кварк, испуская w-бозон, распадаясь на электрон и нейтрино (см. рис. 9.8). Масса w-бозона

$$w \sim 80\, M_p,$$

а время жизни w-бозона

$$t \sim 10^{-16} \text{сек}.$$

Таким образом, изучая подобные процессы, можно изучать малые промежутки времени порядка t. На таких малых временах представления современной физики о мельчайших частицах и их взаимодействиях выполняются.